**Mühazirə № 1.** Fənnin predmeti. Təsadüfi sınaqlar və elementar hadisələr fəzası. Təsadüfi hadisənin ehtimalınn tərifləri. Kombinatorikanın qaydaları və elementləri

**Qısa icmalı:**

Ehtimal nəzəriyyəsi fənninin predmeti. Təsadüfi sınaq anlayışı, elementar hadisələr fəzası. Təsadüfi hadisələr, onlar üzərində əməllər. Ehtimalın bəzi tərifləri. Kombinatorikanın elementləri və qaydaları.

1. **Ehtimal nəzəriyyəsi fənninin yaranma tarixi və tədqiqat obyekti**

«Ehtimal nəzəriyyəsi» termini bəzən bu elm ilə tanış olmayanlara qəribə görünür. Belə ki, «nəzəriyyə» sözü elm ilə bağlı olub, qanunauyğunluqları öyrənir. «Ehtimal» sözü isə təsadüfi, qeyri-müəyyən hadisələr ilə bağlı işlədilir. Ona görə də bu iki sözün birləşməsindən düzəldilmiş «ehtimal nəzəriyyəsi» ilk baxışda təəccüblü görünür. Müşahidələr göstərir ki, təsadüfi hadisələr də müəyyən qanunauyğunluqlara tabedirlər. Belə qanunauyğunluqlar kütləvi hadisələr üçün xarakterikdirlər. **Kütləvi hadisələr** dedikdə elə hadisələr nəzərdə tutulur ki, onları praktiki olaraq eyni şəraitdə istənilən sayda təkrar icra etmək mümkündür. Məsələn, nərd zərinin hamar lövhə üzərinə atılması, hədəfi vurmaq üçün atəş açılması və s. belə hadisələrdir. Ehtimal nəzəriyyəsində əsasən kütləvi hadisələr öyrənilir. Ehtimal nəzəriyyəsinə aid ilk fikirlərə fransız alimi Blez Paskalın (1623-1662) işlərində rast gəlinir. Bu fikirlər ehtimal nəzəriyyəsinin bünövrəsinin B.Paskal tərəfindən qoyulduğunu söyləməyə əsas verir. Ehtimal nəzəriyyəsinin məşğul olduğu məsələlərin bir qədər qenişləndirilməsində Pyer Simon Laplas (1749-1827), Puasson Sumeon (1781-1840) və Karl Fridrixs Qaussun (1777-1855) böyük xidmətləri olunmuşdur. Bu elmdə sonrakı fundamental tədqiqatlar böyük rus alimləri P.L.Çebışev (1821-1894), A.M.Lyapunov (1857-1918) və A.A.Markovun (1856-1922) adları ilə bağlıdır. Ehtimal nəzəriyyəsini aksiomatik elm şəklinə salan akademik A.N.Kolmoqorov olmuşdur. Bu elmin inkişafında S.N.Bernşteyn və İ.Y.Xinçinin də xidmətləri danılmazdır.

Ehtimal nəzəriyyəsində təcrübə, müşahidə, ölçmə və s. anlayışları əvəzinə «sınaq» sözündən istifadə olunur. Hər bir sınaq müəyyən şərtlər daxilində aparılır. Sınağın aparılma şərtləri əvvəlcədən məlum olur. Sınağın aparılma şərtləri dəyişdikdə başqa sınaq alınır. Sınağın hər bir icrası zamanı alınan nəticəyə **hadisə** deyilir. Məsələn, sınaq bir nərd zərinin hamar lövhə üzərində atılması olduqda, hadisə olaraq «zərin yuxarı üzündə 6 xalının düşməsi», «zərin yuxarı üzündə tək xalın düşməsi» və s. götürülə bilər. Aparılan sınaq nəticəsində nəzərdə tutulan hadisə baş verə də bilər, baş verməyə də bilər.

Sınağın hər bir icrasında hökmən baş verən hadisəyə **yəqin hadisə** deyilir. Məsələn, bir nərd zərini hamar lövhə üzərinə atdıqda yuxarı üzdə 7-dən kiçik xalın düşməsi yəqin hadisədir. Sınağın heç bir icrasında baş verməyən hadisəyə **mümkün olmayan hadisə** deyilir. Məsələn bir nərd zərini hamar lövhə üzərinə atdıqda yuxarı üzdə 8 xalının düşməsi mümkün olmayan hadisədir. Sınağın icrası zamanı nəzərdə tutulan hadisənin baş verib-verməməsi haqqında əvvəlcədən dəqiq fikir söyləmək mümkün deyilsə, onda həmin hadisəyə **təsadüfi hadisə** deyilir. Bir nərd zərinin hamar lövhə üzərinə atılması zamanı yuxarı üzdə 2 xalının düşməsi təsadüfi hadisədir.

**2. Nisbi tezlik və onun statistik dayanıqlılığı**

Ehtimal nəzəriyyəsində təsadüfi hadisələri adətən latın əlifbasının böyük hərfləri ilə, məsələn,  kimi işarə edirlər.

Fərz edək ki,  təkrar aparıla bilən sınaq,  isə bu sınağın icrasında baş verə bilən təsadüfi hadisədir.  sınağı  dəfə aparıldıqda  hadisəsinin baş verdiyi halların sayını  ilə işarə edək. -ya  hadisəsinin tezliyi deyilir. Aşağıdakı işarəni qəbul edək:

. (1)

(1) düsturu ilə təyin olunan  kəmiyyətinə  sınaqdan ibarət olan seriyada  **hadisəsinin nisbi baş vermə tezliyi** deyilir.

- sınağı olaraq metal pulun hamar lövhə üzərinə atılması,  isə «metal pulun gərb üzünün yuxarı düşməsi» hadisəsi götürülərək, Byuffon və Pirson tərəfindən aparılmış 3 sınaqlar seriyasında alınmış nəticələri təqdim edirik.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Sınaq seriyaları | Sınaqlar seriyasında aparılmış sınaqların sayı | hadisəsinin baş verdiyi halların sayı | Nisbi tezlik |
| I | 4040 | 2048 | 0,5080 |
| II | 12000 | 6019 | 0,5016 |
| III | 24000 | 12012 | 0,5005 |

Bu cədvəldən göründüyü kimi, nisbi tezliklər bir-birlərinə yaxın olub təqribi qiymətləri  ədədindən az fərqlənirlər. Bu təcrübənin nəticələri məntiqi mühakiməyə də uyğundur. Belə ki, metal pulun hər iki üzünün yuxarı düşmə «ehtimalı» eyni olmalıdır. Ona görə də gözləmək olar ki, sınaqların təxminən yarısında gərb üzü yuxarı düşsün. Bu ümumi halda da belədir. Yəni sınağın çoxlu sayda aparıldığı sınaqlar seriyalarında hadisənin nisbi tezlikləri bir-birlərindən çox az fərqlənərək, müəyyən ədəd ətrafında rəqs edirlər. Bu xassəyə **nisbi tezliyin statistik dayanıqlılıq xassəsi** deyilir. Nisbi tezliklər hansı ədəd ətrafında rəqs edirlərsə, bu ədədə həmin **hadisənin statistik ehtimalı** deyilir. Nisbi tezliyin statistik dayanıqlılıq xassəsini riyazi olaraq belə yazmaq olar:

.

Ehtimalın statistik tərifini ilk dəfə alman alimi R.Mizes (1883-1958) vermişdir. Lakin bu tərifin müəyyən nöqsanları oldugundan həmin tərif ehtimal nəzəriyyəsinin elmi əsasını təşkil edə bilmir. Gələcəkdə ehtimalın daha əsaslı, aksiomatik tərifi veriləcəkdir.

**3.Elementar hadisələr fəzası**

Hər bir təsadüfi hadisənin müəyyən bir baş vermə ehtimalı olur. Ona görə də ehtimal nəzəriyyəsində ehtimala təsadüfi hadisənin funksiyası kimi baxılır. Bununla əlaqıdar olaraq əvvəlcə hadisələr çoxluğu ilə tanış olmaq lazım gəlir.

Fərz edək ki,  sınağının hər bir icrasında  hadisələrindən yalnız biri baş verir və bu hadisələrdən biri baş verdikdə o biri baş vermir. Eyni zamanda baş verə bilməyən hadisələrə **cüt-cüt uyuşmayan hadisələr** deyilir.  hadisələrindən hər birinə  sınağının **elementar hadisəsi** deyilir. Bütün belə hadisələr çoxluğu isə  **sınağının elementar hadisələr** **fəzası** adlanır. Elementar hadisələr fəzası  və ya  kimi işarə olunur. Məsələn,  sınağı bir nərd zərinin hamar lövhə üzərinə atılması,  isə zərin yuxarı üzündə  xalının  düşməsi olarsa, onda  olar. Hər bir sınaq üçün elementar hadisədən fərqli hadisələrə baxmaq olar.  sınağında «zərin yuxarı üzündə cüt xal» düşür hadisəsini  ilə işarə edək. Aydındır ki, zərin yuxarı üzündə 2,4,6 xallarından hər hansı biri düşərsə,  hadisəsi baş verir. Başqa sözlə,  hadisəsinin baş verməsi  hadisələrindən hər hansı birinin baş verməsi deməkdir. Bunu belə yazmaq olar: . Göründüyü kimi təsadüfi hadisə elementar hadisələr fəzasının altçoxluğudur: . Bu ümumi halda da belədir. **Yəni elementar hadisələr fəzasını təşkil edən çoxluğun hər bir altçoxluğu təsadüfi hadisədir.**

Məlumdur ki,  sayda elementi olan çoxluğun altçoxluqlarının sayı  qədərdir. Burada nəzərdə tutulur ki, həmin altçoxluqlardan biri verilən çoxluğun özü, biri isə boş çoxluqdur. Deməli,  sayda elementar hadisələrdən ibarət olan  elementar hadisələr fəzasında baş verə bilən hadisələrin ümumi sayı  qədərdir. Bu hadisələrdən biri yəqin hadisədir, bu -nın özüdür, biri isə mümükün olmayan hadisədir. Ehtimal nəzəriyyəsində mümkün olmayan hadisəni  kimi, boş çoxluq simvolu ilə işarə edirlər.

**4.Təsadüfi hadisələr üzərində əməllər**

 sınağının elementar hadisələr fəzasını  ilə işarə edək. Məlum olduğu kimi, bu fəzanın hər bir altçoxluğu da hadisədir. Bunu əsas götürərək, çoxluqlar üzərində əməllər və onlar arasındakı münasibətlərdən istifadə edərək, təsadüfi hadisələr üzərində oxşar əməllər və münasibətlər təyin edilirlər.

 hadisəsi baş verdikdə hökmən  hadisəsi də baş verərsə, onda deyirlər ki, ***A* hadisəsi *B* hadisəsini doğurur** və ya ***B* hadisəsi *A*-nın nəticəsidir**. Bunu belə yazırlar: . Məsələn, *A*={zərin yuxarı üzündə 2 xalı düşür}, *B*={zərin yuxarı üzündə cüt xal düşür} işarə olunduqda  yazmaq olar. Doğrudan da, yuxarı üzdə 2 xalı düşübsə, deməli cüt xal düşüb.

Çoxluqlar nəzəriyyəsində olduğu kimi ehtimal nəzəriyyəsində də istənilən  təsadüfi hadisəsi üçün  və  münasibətləri doğrudurlar.

 təsadüfi hadisələri üçün  və  olmasından  olması alınır (tranzitivlik xassəsi).

 və  hadisələri üçün  və  münasibətlərinin hər ikisi eyni zamanda ödənilərsə, onda  və -yə **bərabər hadisələr** və ya **eynigüclü hadisələr** deyilir.  və  hadisələrinin bərabərliyini  kimi yazırlar.

 və  hadisələrindən heç olmazsa biri baş verdikdə baş verən hadisəyə bu **hədisələrin birləşməsi** və ya **hadisələrin cəmi** deyilir.  və  hadisələrin cəmi üçün  və ya  yazılışlarından istifadə olunur. Məsələn, *A*={zərin yuxarı üzündə cüt xal düşür}, *B*={zərin yuxarı üzündə 3-dən böyük olmayan xal düşür} hadisələri olduqda ={zərin yuxarı üzündə 5-dən fərqli xal düşür} hadisəsi olar.

**Çoxluqlar nəzəriyyəsində olduğu kimi, ehtimal nəzəriyyəsində də birləşmə (cəm) əməli üçün , , ,  münasibətləri doğrudurlar.**

İkidən çox sayda hadisələrin də cəm əməli təyin olunur.  sayda  hadisələrindən heç olmazsa biri baş verdikdə baş verən hadisəyə bu hadisələrin cəmi deyilir və  kimi işarə olunur. Hesabı sayda  hadisələrindən həç olmazsa biri baş verdikdə baş verən hadisəyə bu hadisələrin cəmi deyilir və  kimi yazılır.

 və  hadisələrinin hər ikisi eyni zamanda baş verdikdə baş verən hadisəyə bu **hadisələrin kəsişməsi və ya hasili** deyilir.  ilə -nin hasili  və ya  simvollarından biri ilə işarə olunur.  və  ilə hadisələrin cəmində göstərilən hadisələr işarə olunduqda {zərin yuxarı üzündə 2 xalı düşür} olur.

 olması  və  hadisələrinin uyuşmayan olması deməkdir. Çoxluqlar nəzəriyyəsində olduğu kimi hadisələr üçün də , , , ,  münasibətləri doğrudur.

İkidən çox sayda hadisələrin də hasili təyin edilir.  sayda  hadisələrinin hasilini , hesabi sayda  hadisələrinin hasilini  kimi işarə edirlər.  düsturu doğrudur.

Yalnız  hadisəsi baş verib,  hadisəsi baş vermədikdə baş verən hadisəyə ***A* ilə *B*-nin fərqi** deyilir.  ilə -nin fərqi üçün  və  simvollarından istifadə olunur.  və  yuxarıdakı hadisələr olduqda {zərin yuxarı üzündə 4 və ya 6 xalı düşür} hadisəsi olur.

Yalnız və yalnız  hadisəsi baş vermədikdə baş verən hadisəyə ***A*-nın əks hadisəsi** və ya ***A*-nın inkarı** deyilir. -nın inkarı  kimi işarə olunur. Məsələn,  ilə *A*={zərin yuxarı üzündə cüt xal düşür} hadisəsi işarə olunduqda ={zərin yuxarı üzündə tək xal düşür} olar.

Qeyd edək ki, istənilən  hadisəsi üçün  və  hadisələri uyuşmayandırlar, yəni . İxtiyari  hadisəsi üçün  ilə -nın cəmi isə yəqin hadisədir: .

Əgər  hadisələri cüt-cüt uyuşmayan olub,  hadisəsi üçün  olarsa, onda deyirlər ki, ***B* hadisəsi  hadisələrinə ayrılmışdır**.

Cüt-cüt uyuşmayan  hadisələrinin cəmi yəqin hadisədirsə, yəni  olarsa, onda deyirlər ki, ****  **hadisələri tam qrup və ya tam sistem təşkil edirlər**.

Təsadüfi hadisələr üzərində əməllərə aid aşağıdakı məsələni həll edək.

***Məsələ.*** A, B, C ixtiyari üç təsadüfi hadisə olduqda aşağıdakı hadisələri A, B, C təsadüfi hadisələri üzərindəki əməl simvollarının köməyi ilə yazın:

a) Yalnız A hadisəsi baş vermişdir;

b) yalnız A və B baş vermişdir;

v) hər üç hadisə baş vermişdir;

q) bu üç hadisədən heç olmazsa biri baş vermişdir;

d) bu hadisələrdən heç olmazsa ikisi baş vermişdir;

e) yalnız bir dənə hadisə baş vermişdir;

j) yalnız iki dənə hadisə baş vermişdir;

z) heç bir hadisə baş verməmişdir;

***Həlli:*** a) Yalnız A hadisəsinin baş verməsi üçün A hadisəsi baş verməli, B və C hadisələri isə baş verməməlidir. Bunu belə yazmaq olar: ;

b) Yalnız A və B hadisələrinin baş verməsi üçün A, B hadisələrinin hər ikisi baş verməli, C hadisəsi isə baş verməməlidir. Bu isə belə yazılır: ;

v) Hər üç hadisənin baş verməsi A, B, C hadisələrinin hasilinin baş verməsidir: ABC.

q) Bu 3 hadisədən heç olmazsa birinin baş verməsi A, B, C hadisələrinin cəmi kimi yazılır: A+B+C.

d) Bu hadisələrdən heç olmazsa ikisinin baş verməsi A ilə B-nin hər ikisinin, A ilə C-nin hər ikisinin, B ilə C-nin hər ikisinin eyni zamanda baş verməsindən ibarət olan üç hadisənin cəmi kimi yazılır: AB+AC+BC.

e) Yalnız 1 dənə hadisənin baş verməsi 1) A baş verir, lakin B ilə C baş vermir, 2) B baş verir, A ilə C baş vermir, 3) C baş verir, A ilə B baş vermir kimi üç hadisənin cəmi kimi yazıla bilər: .

j) Yalnız 2 dənə hadisənin baş verməsi 1) A ilə B baş verir, C baş vermir, 2) A ilə C baş verir, B baş vermir, 3) B ilə C baş verir, A baş vermir kimi üç hadisənin cəmi kimi yazıla bilər: .

z) Heç bir hadisənin baş verməməsi nə A, nə B, nə də C hadisəsinin baş verməməsi, deməli A-nın əksinin, B-nin əksinin, C-nin əksinin eyni zamanda baş verməsi deməkdir. Bu isə onların hasili kimi belə yazıla bilər: .

**ƏDƏBİYYAT**

1. M.M.Səbzəliyev “Ali riyaziyyatdan mühazirələr” II hissə, Bakı-2014,

XI fəsil **§**1-§3.

1. M.M.Səbzəliyev “Ali riyaziyyatdan məsələlər” II hissə, Bakı-2016,

XII fəsil §1.

1. Hadisələr cəbri.
2. -cəbr və ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomları.
3. Ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomlarından çıxan nəticələr.
4. Ehtimalın klassik tərifi.

**1. Hadisələr cəbri**

Ədədi funksiyaları öyrənmək üçün əvvəlcə onların təyini oblastları olan ədədi çoxluqlar ilə tanıış olmaq lazım gəlir. Ehtimal nəzəriyyəsində ehtimala təsadüfi hadisənin ehtimalı kimi baxılır. Bununla əlaqədar olaraq bu fəsil §2-də sınağındakı müəyyən təsadüfi hadisələrdən ibarət olan  elementar hadisələr fəzası ilə tanış olduq. Artıq bizə məlumdur ki, -nın hər bir altçoxluğu təsadüfi hadisədir. Lakin -nın hər bir altçoxluğunun ehtimalını təyin etmək mümkün olmur. Burada -nın elə altçoxluqlar sistemi göstəriləcəkdir ki, bu sistemə daxil olan hər bir təsadüfi hadisənin ehtimalını tapmaq mümkün olsun.

**Tərif.** Fərz edək ki, hər hansı bir sınağının elə altçoxluqlar sistemi verilmişdir ki, onun üçün aşağıdakı şərtlər ödənilir:

**1) **

**2)  olmasından çıxır ki,   **.

Onda -ə **hadisələr cəbri** deyilir.

Hadisələr cəbrinin tərifindəki şərtlərdən və olmasından çıxır ki, .

Tərifdəki ikinci şərtdən alınır ki, -ə daxil olan sonlu sayda  hadisələrinin cəmi və hasili də -ə daxildir. Yəni  olmasından olması alınır. Lakin hesabi sayda  hadisələrinin hər birinin -ə daxil olmasından onların cəminin və  hasilinin -ə daxil olması alınmır.

**2. -cəbr və ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomları**

Fərz edək ki, sistemi üçün hadisələr cəbrinin tərifindəki 1), 2) şərtlərindən əlavə aşağıdakı üçüncü şərt də ödənilir:

**3)  olduqda  olur**.

Onda -ə **-cəbr** və ya **Borel cəbri** deyilir.

Indi isə ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomlarına keçək. Fərz edək ki,  hər hansı bir elementar hadisələr fəzası, isə onun -cəbridir. -cəbrində təyin olunmuş və aşağıdakı şərtləri ödəyən həqiqi qiymətli  funksiyasına **ehtimal funksiyası** və ya sadəcə **ehtimal** deyilir:

1. **İxtiyari  təsadüfi hadisəsi üçün olur;**
2. **(Normallıq aksiomu). Yəqin hadisənin ehtimalı vahidə bərabərdir: **
3. **(Additivlik aksiomu). Cüt-cüt uyuşmayan ** ** hadisələrinin birləşməsinin ehtimalı onlarının ehtimalları cəminə bərabərdir:**

**.**

Bu üç aksiom **ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomları** adlanırlar. Onları ilk dəfə böyük rus riyaziyyatçısı A.N.Kolmoqorov vermişdir. Bu aksiomlar vasitəsilə A.N Kolmoqorov ehtimal nəzəriyyəsini ciddi əsaslandırılmış bir aksiomatik elm kimi qurmuşdur.

**3. Ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomlarından çıxan nəticələr**

Ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomlarından aşağıdakı nəticələr alınır.

**1.** Əgər  isə onda  (1)

**İsbatı.** Doğrudan da, şəkil 1-ə əsasən olduqda

 (2)

bərabərliyi doğrudur. Digər tərəfdən hadisəsi baş verdikdə  hadisəsi baş vermədiyi üçün  və  hadisələri uyuşmayan hadisə-lərdir. Ona görə ehtimalın additivlik xassəsinə görə (2)-dən alırıq:





Şəkil 1





**2. **olduqda 

**İsbatı.** I aksioma görə olduğu üçün bu xassənin doğruluğu birinci nəticənin isbatında yazdığımız  bərabərliyindən birbaşa alınır.

**3.** Mümkün olmayan hadisənin ehtimalı sıfıra bəra-bərdir:.

**İsbatı.** Bu nəticənin doğruluğu normallıq aksiomuna görə ****olmasından və  münasibətlərinə görə birinci nəticədən alınır:



**4.** İxtiyari  hadisəsi üçün 

**İsbatı.** İstənilən üçün olmasından, ikinci, üçüncü nəticələrdən və normallıq aksiomundan alırıq:

.

**5.** İstənilən üçün .

**İsbatı.** İxtiyari üçün olduğu məlumdur. Buradan və və -nin uyuşmayan olmasından additivlik, normallıq aksiomlarına əsasən alırıq:

.

**6.** İstənilən hadisələri üçün

** **(3)

bərabərliyi doğrudur.

**Isbatı.** Burada aşağıdakı iki hala ayrı-ayrılıqda baxaq.

**1) hal. .** Bu halda **** və ****uyuşmayan hadisələr olduqları üçün ehtimalın additivlik aksiomuna görə

 (4)

bərabərliyi doğrudur.Digər tərəfdən üçüncü nəticəyə görə ****. Buradan və (4)-dən alınır ki, bu halda (3) doğrudur:

.

**2) hal. **. Bu halda şəkil 2-yə əsasən

 (5)

bərabərliyi doğrudur.  ilə  uyuşmayan

hadisələr olduqları üçün ehtimalın additivlik

aksiomuna görə (5)-dən alırıq:

. (6)

olduğu üçün birinci nəticəyə görə



olur. Sonuncu bərabərliyi (6)-nın sağ tərəfində nəzərə aldıqda (3) bərabərliyi alınır.

**7.** İstənilən  hadisələri üçün

 (7)

bərabərsizliyi doğrudur.

**İsbatı.** I aksioma görə olduğu üçün (7)-nin doğruluğu birbaşa (3)-dən alınır.



Şəkil 2







Qeyd etmək lazımdır ki, eyni bir -cəbrində I, II, III

aksiomlarını ödəyən müxtəlif ehtimal funksiyaları təyin etmək olar. Ona görə də bir qayda olaraq ehtimal nəzəriyyəsində hər bir sınağı üçün  elementar hadisələr fəzası, onun  -cəbri və -də təyin olunmuş  ehtimal funksiyası göstərilir. Bu  üçlüyünə **ehtimal fəzası** deyirlər.

**4.Ehtimalın klassik tərifi**

Fərz edək ki, sınağının elementar hadisələr fəzası  sayda eyni ehtimallı elementar hadisələrdən təşkil olunmuşdur:  Burada  ilə ehtimal funksiyası işarə olunmuşdur.

Fəzanı təşkil edən elementar hadisələrin cüt-cüt uyuşmayan olmasından və  fəzasının yəqin hadisə olmasından alırıq:



İndi isə -nın  sayda elementar hadisələrdən ibarət olan hər hansı bir  təsadüfi hadisəsini götürək:

. Burada  ilə  elementar hadisələr fəzasından olub,  hadisəsini törədən sayda elementar hadisələr işarə olunmuşlar. Ehtimalın additivlik xassəsinə görə yazmaq olar:



Beləliklə, biz aşağıdakı düsturu aldıq:

. (1)

(1) düsturu onu göstərir ki, eyni ehtimallı sonlu sayda elementar hadisələrdən ibarət olan fəzada istənilən təsadüfi hadisənin ehtimalı bu hadisəni törədən elementar hadisələrin sayının həmin fəzanın bütün elementar hadisələri sayına olan nisbətinə bərabərdir.

 sayda  hadisələrindən hər hansı biri baş verdikdə  hadisəsi baş verir. Ona görə bu hadisələrin sayını göstərən  ədədinə  hadisəsi üçün **“əlverişli hallar sayı”** deyilir. Hər bir sınaqda sayda  hadisələrindən biri hökmən baş verir. Ona görə elementar hadisələrin sayını göstərən  ədədinə **“mümkün hallar sayı”** deyilir. Qeyd olunaları nəzərə alaraq (1) düsturunu aşağıdakı kimi də yazmaq olar:

. (2)

(1) və (2) düsturu **ehtimalın klassik tərifi**ni ifadə edir. Onu ilk dəfə 1812-ci ildə Laplas vermişdir.

**Məsələ 1** . Bir nərd zərini 1dəfə hamar lövhə üzərinə atdıqda onun yuxarı üzündə tək xalın düşməsi hadisəsinin ehtimalını tapın.

**Həlli.** Burada mümkün hallar sayı 6-dır (yuxarı üzdə 1,2,3,4,5,6 xallarından birinin düşməsi). Ehtimalı axtarılan  hadisəsi üçün əlverişli hallar sayı 3-dür.(1,3, 5, xallarından birinin düşməsi). (2) düsturuna görə



**Məsələ 2.** Qutuda 3 ağ və 2 qara kürə vardır. Bu qutudan təsadüfi olaraq 2 kürə çıxarılır. Çıxarılan hər iki kürənin ağ olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

**Həlli.** Ağ kürələri şərti olaraq  qara kürələri isə ilə işarə edək. Bütün mümkün hallar, yəni 5 kürədən ikisinin çıxarılmasının müxtəlif halları aşağıdakılardır:

.

Deməli mümkün hallar sayı 4+3+2+1=10-dur. Əlverişli hallar 3 ağ  kürələrindən ikisinin çıxarılmasıdır. Bunlar aşağı-dakılardır: . Yəni əlverişli hallar sayı 3-dür. Ehtimalın klassik tərifinə görə axtarılan ehtimal -dür.

Qeyd edək ki, birləşmələr nəzəriyyəsindən məlumatı olanlar yuxarıdakı mühakimələri aparmadan məsələni birbaşa aşağıdakı düstur ilə həll edə bilərlər:

.

Gələcəkdə biz birləşmələr nəzəriyyəsinin elementləri ilə tanış olacağıq.

Ehtimalın klassik tərifi sadə olsa da , onun tətbiq dairəsi məhduddur. Praktikada rast gəlinən elementar hadisələr həmişə eyni ehtimallı olmurlar. Bəzən isə onların eyni ehtimallı olub- olmadıqlarını təyin etmək çətin olur.Elə hallar da olur ki, əlverişli və mümkün hallar sayından biri və ya hər ikisi sonsuz olur. Belə hallarda ehtimalın klassik tərifindən istifadə etmək mümkün olmadığından ehtimalı başqa üsullarla təyin edirlər.

**ƏDƏBİYYAT**

1. M.M.Səbzəliyev “Ali riyaziyyatdan mühazirələr” II hissə, Bakı-2014,

XI fəsil **§**4,§5.

1. M.M.Səbzəliyev “Ali riyaziyyatdan məsələlər” II hissə, Bakı-2016,

XII fəsil §1.

1.Birləşmələr nəzəriyyəsinə aid məlumat. Dekart hasil. Permutasion.

2. Aranjeman.

3. Kombinzon.

4. Klassik tərif əsasında birləşmələr nəzəriyyəsindən istifadə etməklə məsələlər həlli.

5. Həndəsi ehtimal.

**1. Birləşmələr nəzəriyyəsinə aid məlumat. Dekart hasil. Permutasion**

Bir sıra praktiki məsələlərin həllində müəyyən çoxluğun elementlərindən öz düzülüş sıraları, tərkibləri ilə bir-birlərindən fərqlənən qruplar, birləşmələr düzəltmək lazım gəlir. Məsələn, zavodda sex rəisi müxtəlif işləri fəhlələr arasında bölür, şahmatçı oyun prosesində fiqurların müxtəlif gediş variantlarını müəyyən ardıcıllıqla seçərək oynayır və s. Belə məsələlərdə elementlərin müxtəlif kombinasiyalarından söhbət gedir. Riyaziyyatın birləşmələri, kombinasiyaları öyrənən bölməsinə **birləşmələr nəzəriyyəsi** və ya **kombinatorika** deyilir. Kombinatorikada bir qayda olaraq sonlu çoxluqların elementlərindən düzəldilə bilən birləşmələr öyrənilir.

**Nizamlanmış seçmələr.** n elementli çoxluğun hər bir elementinə uyğun olaraq, 1-dən n -ə qədər olan ədədləri qarşı qoymaqla (məsələn, elementin durduğu yerin nömrəsini) verilmiş çoxluğun elementləri ilə 1-dən n -ə qədər olan ədədlər arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaq olarsa, belə çoxluğa **nizamlanmış çoxluq** deyilir.

çoxluğunun *r* sayda



elementlərindən təşkil olunmuş ixtiyari nizamlanmış çoxluğa r həcm li **nizamlanmış seçmə** deyilir.

Biz birləşmələrin üç növü ilə tanış olacağıq: permutasiyon birləşmələr, aranjeman birləşmələr və kombinezon birləşmələr. Birləşmələrin bu növləri ilə tanış olmazdan əvvəl, riyaziyyatda, eləcə də ehtimal nəzəriyyəsində tez-tez istifadə olunan **çoxluqların Dekart hasili** və ya düz hasili anlayışı ilə tanış olaq.

Misaldan başlayaq. 27 ədədi 2 və 7 rəqəmlərindən istifadə etməklə yazılır. 27 ədədini yazmaq üçün əvvəl 2, sonra isə 7 rəqəmi yazılmalıdır. Əgər bu rəqəmlərin yerlərini dəyişək, başqa bir ədəd 72 alınar. (2; 7) –yazılışına nizamlı ədədlər cütü deyilir. Ümumi şəkildə x və y ədədlərinin nizamlı cütünü (x; y) kimi yazırlar. 44 ədədinin yazılışında eyni bir 4 rəqəmi 2 dəfə iştirak edir. Bu yazılışa uyğun nizamlı cüt (4; 4) kimi yazılır. Deməli, nizamlı cütdə birinci və ikinci ədədlər bərabər də ola bilərlər.

Nizamlı cütləri yalnız ədədlərdən deyil, istənilən təbiətli elementar çoxluğunun elementlərindən də düzəltmək olar. Fərz edək ki, X-hər hansı bir çoxluq, x, y isə bu çoxluğun elementləridir. (x elementli y-ə bərabər də ola bilər). (x; y) - ə nizamlı cüt, x,y -ə isə bu cütün komponentləri və ya koordinatları deyilir. (x1 , y1) və (x2 , y2) cütləri o zaman eyni cütlər hesab edilirlər ki, x1=x2, y1=y2 olsun. Ona görə də x≠y olduqda (x; y) ilə (y; x) müxtəlif cütlər hesab olunurlar.

Məsələn, X={, b, c} hərflər çoxluğundan düzəldilə bilən bütün mümkün nizamlı cütlər aşağıdakılardır: (), (b; b), (c; c), (; b), (b; ),(; c),(c; ), (b; c), (c; b).

Daha ümumi cüt anlayışı cütün komponentlərinin hər birini iki müxtəlif çoxluqdan götürdükdə alınır. Bu halda (x, y) nizamlı cütündəki birinci komponent x müəyyən bir X çoxluğundan, ikinci komponent y isə Y çoxluğundan götürülür. Məsələn, tutaq ki, X={, b, c}, Y= {1; 2} çoxluqları verilmişdir. Birinci kompo-nenti X çoxluğundan, ikinci komponenti isə Y çoxluğundan götürməklə bütün mümkün cütlər çoxluğunu düzəldək:{(; 1), (; 2), (b; 1), (b; 2), (c; 1),(c; 2)}. Bu cütlər çoxluğuna X və Y çoxluqlarının dekart hasili və ya düz hasili deyilir və

X x Y kimi işarə olunur.

X və Y çoxluqlarının dekart hasilinə ümumi şəkildə də belə tərif verilir:

X x Y= {(x,y)|xϵX, yϵY}

X və Y çoxluqları eyni olduqda, yəni X=Y olduqda X x X dekart hasili x, y hər ikisi X çoxluğunun elementləri olan (x,y) şəkilli bütün mümkün cütlər çoxluğuna deyilir. Məsələn, X={, b, c} olduqda X x X={(), (b; b), (c; c), (; b), (b; a), (; c), (c; ), (b; c), (c; b)}olur.

Belə qəbul edilmişdir ki, X ixtiyari çoxluq olduqda X x Ø= Ø x X= Ø.

Dekart hasil ümumiyyətlə desək. nə kommutativlik (yerdəyişmə), nə də assosi-ativlik (qruplaşdırma) qanunlarına tabe deyil. n sayda elementi olan X çoxluğu ilə m sayda elementi olan Y çoxluğunun dekart hasilindəki elementlərin (cütlərin) sayı m·n-ə bərabərdir. Dekart hasilin riyaziyyatda geniş tətbiqləri vardır. Bir sadə məsələ göstərək.

**Məsələ 1.**  A şəhərindən B şəhərinə 2 müxtəlif yol, B şəhərindən C şəhərinə isə 3 müxtəlif yol vardır. B şəhərindən keçməklə A şəhərindən C şəhərinə neçə müxtəlif yolla getmək olar?

**Həlli.** A şəhərindən B şəhərinə olan yolları simvolik olaraq 1,2, B şəhərindən C şəhərinə olan yolları isə ,b,c ilə işarə edək. Onda B şəhərindən keçməklə A şəhərindən C şəhərinə getmək cütlər ilə, yəni X=={1, 2}, Y=={a, b, c} çoxluqlarına dekart hasili ilə təsvir oluna bilər: {(1; ), (1; b), (1; c), (2; , (2; b), (2; c)}.Belə cütlərin sayı isə altıya bərabərdir. Əslində bu cütləri yazmağa ehtiyac yoxdur. X-in 2, Y-in 3 sayda elementi olduğu üçün X x Y dekart hasilindəki cütlərin sayı 2·3=6 olacaqdır. Deməli, B şəhərindən keçməklə A şəhərindən C şəhərinə 6 müx-təlif yol ilə getmək olar.

İndi isə birləşmələrin bir növü olan permutasion birləşmələr ilə tanış olaq. Sadəlik üçün misaldan başlayaq. Fərz edək ki, bizə yalnız 1,2,3 rəqəmlərinin köməyi ilə və heç bir rəqəm təkrar olunmadan yazılan bütün üçrəqəmli ədədlərin sayını tapmaq lazımdır. Aydındır ki, belə üçrəqəmli ədədlər aşağıdakılardır:

123 213 312

132 231 321

Əgər X çoxluğunun elementləri ədədlər deyil, ixtiyari təbiətli elementlər məsələn, X={a, b, c} olsaydı bu çoxluğun elementlərindən yalnız elementlərin düzülüş sırası ilə fərqlənən birləşmələr

abc bac cab

acb bca cba olardı. Bir-birlərindən yalnız

elementlərinin düzülüş sırası ilə fərqlənən belə birləşmələrə **permutasion birləş-mələr** və ya sadəcə olaraq **permutasionlar** deyilir. n elementdən düzəldilə bilən permutasionlara **n-elementli permutasionlar** deyilir. n-elementli permutasionların sayını adətən Pn ilə işarə edirlər. (bu işarə fransızca əvəzləmə mənasını verən “permutasion” sözünün baş hərfindən götürülmüşdür).

Aydındır ki, P1=1, P2=2 (ab, ba permutasion birləşmələri). Yuxarıda göstərdik ki, P3=6. 4-elementli permutasionların sayı P4 –ü aşağıdakı mühakimə ilə tapmaq olar. Tutaq ki, 4 elementi olan X={, b, c, d} çoxluğu verilmişdir. ,b,c elementlərindən yuxarıda düzəldilmiş 3-elementli permutasionların hər birində X-in dördüncü d elementini növbə ilə birinci, ikinci, üçüncü və dördüncü yerlərdə yazmaqla bütün mümkün 4-elementli permutasionları düzəltmək olar. Məsələn, 3-elementli abc permutasiyasında d elementini növbə ilə birinci, ikinci, üçüncü və dördüncü yerlərdə yazdıqda 4-elementli dabc, adbc, abdc, abcd permutasiyaları alınır. 3 –elementi permutasiyaların sayı P3=6 olduğundan və hər bir belə permutasiyadan dörd ədəd 4-elementli permutasiyalar alındığından bütün mümkün 4-elementli püermutasiyaların sayı P4=P3·4=6·4=24 olar.

Riyaziyyatda 1-dən n-ə qədər olan bütün natural ədədlərin hasili üçün n! işarəsindən istifadə olunur: 1·2·3···n= n! (n! belə oxunur: n-faktorial).

Bu işarədən istifadə edərək, P1=1!, P2=2=1·2=2!, P3=1·2·3=3!, P4=P3·4=3!·4=1·2·3·4=4! yazmaq olar. Yuxarıdakı mühakiməni davam etdirərək, P5 =P4·5=4!·5=5!, P6=P5·6=5!·6=6!,...,Pn=Pn-1·n=(n-1)!n=n! Olduğunu alırıq.

Beləliklə, n-elementli permutasiyaların sayı üçün

**Pn=n!** (1)

düsturu doğrudur.

**2. Aranjemanlar**

n elementi olan çoxluğun m(m≤n) sayda elementlərindən düzəldilmiş nizamlı birləşmələrə **n elementdən m elementli aranjemanlar**  deyilir. Belə birləşmələr bir- birlərindən həm elementlərin müxtəlifliyinə, həm də düzülüş sırasına görə fərqlənə bilərlər. n elementdən m elementli aranjemanların sayı kimi işarə olunur. Bu işarə fransızca birləşmə mənasını verən ”arrangement” sözünün baş hərfindən götürülmüşdür.

Aranjemanların sayının hesablanması permutasiyaların sayının tapılmasına nisbətən çətindir. Ona görə üçün düsturun çıxarılışının ətraflı şərhini veririk.

Tutaq ki, bizə n elementi olan M=={1, 2, ..., n} çoxluğu verilmişdir. Bu çoxluğun elementlərindən düzəldilə bilən bir elementli aranjemanlar 1, 2, ..., n olduğu üçün olduğu alınır.

İndi isə M çoxluğunun elementlərindən iki elementli aranjemanları düzəldək. 1 elementini götürüb onun sağ tərəfinə növbə ilə qalan n-1 sayda 2, 3, ..., n elementlərini yazmaqla n-1 sayda aşağıdakı iki elementli aranjemanları alırıq:

12, 13, 14,...,1n . (2)

İndi isə a2 elementini götürüb onun sağ tərəfinə qalan n-1 sayda 1,2, 3, ..., n elementlərini yazmaqla n-1 sayda aşağıdakı iki elementli aranjemanlar yazaq:

21, 23, 14,...,2n . (3)

Prosesi bu qayda ilə davam etdirərək sonda an elementini götürüb onun sağ tərəfin-də qalan n-1 sayda 1, 2, ..., n-1 elementlərini yazmaqla n-1 sayda iki elementli aşağıdakı aranjemanlar alınır:

n1, n2, n3,...,n n-1 (4)

Bu qayda ilə yazılan (2), (3), ..., (4) aranjemanlar qrupunun hər birində n-1 sayda iki elementli aranjemanlar olduğu üçün n elementdən iki elementli aranjemanların ümumi sayı n(n-1) olar. Beləliklə, biz göstərdik ki, düsturu doğ-rudur.

n elementdən 3 elementli aranjemanlar n(n-1) sayda n elementdən iki ele-mentli aranjemanların hər birinin sağ tərəfində yerdə qalan n-2 sayda elementləri yazmaqla alınır. Ona görə də n elementdən 3 elementli aranjemanların ümumi sayı n(n-1)(n-2) olar. Bu isə o deməkdir ki, düsturu doğrudur.

Prosesi bu qayda üzrə davam etdirməklə alınır ki, n elementdən m elementli aranjemanların sayı üçün

(5)

düsturu doğrudur.

(5) düsturunun sağ tərəfini (n-m)(n-m-1) ... 3·2·1 hasilinə vurub, bölək:

Beləliklə, üçün (5) düsturuna ekvivalent olan

(6)

düsturu da doğrudur. n!= Pn, (n-m)!= Pn-m olduğu üçün (6) düsturu belə də yazıla bilər:

(7)

**Məsələ.** 1, 2, 3, 4, 5 rəqəmlərindən heç bir rəqəm təkrar olunmadan neçə müxtəlif üçrəqəmli ədədlər düzəltmək olar?

**Həlli.** Məsələnin şərtində tələb olunan üçrəqəmli ədədlər 5 dənə 1, 2,3,4,5 ədədlə-rindən düzəldilmiş üç elementli aranjemanlardır. Ona görə də belə üçrəqəmli ədədlərin sayı qədərdir. (5) düsturuna görə

olur.

**3. Kombinezonlar**

n elementi olan çoxluğun m(m≤n) sayda elementlərindən düzəldilmiş nizamlanmamış birləşmələrə **n elementdən m elementli kombinezonlar**  deyi-lir. Belə birləşmələr bir-birlərindən ən azı bir element ilə fərqlənirlər. Bu birləş-mələrdə elementləri eyni olub, elementlərin düzülüşləri müxtəlif olan birləş-mələr eyni hesab olunurlar. Dörd elementi olan M=={, b, c, d} çoxluğunun 3 elementli kombinezonları bunlardır:

abc, abd, acd, bcd.

Üç elementdən düzəldilə bilən permutasionların sayı 3!=6 olduğu üçün M=={a, b, c, d} çoxluğunun üç elementli aranjemanları aşağıdakılar olar:

Buradakı aranjemanların ümumi sayı olur. Göründüyü kimi 4 elementdən 3 elementli hər bir kombinezondan P3=3!=6 sayda nizamlanmış birləşmələr, yəni 4 elementdən 3 elementli aranjemanlar alınır. Ona görə də 4 elementdən 3 elementi aranjemanların ümumi sayı olar. Buradan üçün düsturu olur. Bu ümumi halda da belədir. Yəni üçün

(8)

düsturu doğrudur. olduğunu və (6) düsturunu nəzərə alaraq (8) dustu-runu belə də yazmaq olar:

(9)

n!=1·2···(n-m)(n-m+1)(n-m+2)...n=(n-m)!(n-m+1)(n-m+2)...n olduğundan (9) düsturu aşağıdakı şəkildə də yazıla bilər:

(10)

düsturu alınır. (10) düsturundan istifadə etdikdə nəzərə almaq lazımdır ki, sağ tərəfdəki kəsrin surətində ən böyüyü n ədədi olmaqla azalan sırada m sayda ədədin hasili yazılmışdır. 0≤m≤n olduqda

(11)

düsturu doğrudur. (11) düsturundan m ədədi ədədindən böyük olduqda isti-fadə etmək əlverişlidir. 0 ≤ m ≤ n olduqda

düsturu doğrudur.

*Qeyd*.  və  olduqda  hesab olunur.

**Xassə 1**.

.

**Xassə 2**.  (**Paskal qaydası**).

**Xassə 3**. .

**Məsələ.** İdman yarışlarının təşkilində könüllü kimi kömək göstərməyə müraciət etmiş 12 gəncdən 5 nəfərini nüçə müxtəlif üsullu seçmək olar?

**Həlli.** Seçiləcək 5 nəfərin adlarının düzülüş sırası heç bir rol oynamadığı üçün bu 12 elementdən 5 elementli kombinezonların sayının tapılması deməkdir. (10) düsturuna əsasən

alınır.

**4.Klassik tərif əsasında birləşmələr nəzəriyyəsindən istifadə etməklə məsələlər həlli**

Ehtimal nəzəriyyəsində təsadüfi hadisələrin ehtimallarını ehtimalın klas-sik tərifi əsasında hesablayarkən tez-tez birləşmələr nəzəriyyəsinin element-lərindən istifadə etmək lazım gəlir. Burada bir neçə belə məsələnin həlli göstə-rilir.

**Məsələ 1.** Üzərində 1,2,3,4,5 rəqəmləri yazılmış kubiklərlə oynayan uşa-ğın, həmin kubikləri yan-yana düzməklə, təsadüfən “54321” ədədini yazması hadisəsinin ehtimalını tapın.

**Həlli.** Məsələni ehtimalın klassik tərifi əsasındadüsturu ilə həll etmək üçün n- əlverişli hallar və m-mümkün hallar sayını bilmək lazımdır. Mümkün hallar sayı 1,2,3,4,5 rəqəmlərindən heç bir rəqəm təkrar olunmadan düzəldilə bilən beşrəqəmli ədədlərin sayına bərabərdir. Bu ədədlər isə 5 elementli permutasiyalardır. (1) düsturuna görə P5=5!=120. Bu hadisə üçün əlverişli hal isə bu ədədlərdən birinin “54321” - ədədinin yazılmasıdır. Ehtimalın klassik tərifinə görə .

**Məsələ 2.** Ağ , qara, qırmızı, göy, yaşıl rənglərdə olan parçalardan eyni ölçülü üç zolağı olan üçrəngli bayraq düzəltmək lazımdır. Təsadüfi olaraq hazırlanmış belə bir bayrağın qırmızı, göy, yaşıl rəngli olması ehtimalını tapın.

**Həlli.** Mümkün hallar sayı 5 rəngdən 3 rəngin neçə müxtəlif üsulla seçilməsi sayına bərabərdir. Bu isə 5 elementdən 3 elementli kombinezonların sayıdır. Yəni . Əlverişli hallarin (qirmizi, göy, yaşil rənglərin seçilməsi) sayı isə birə bərabərdir: m=1. Ehtimalın klassik tərifinə görə axtarılan ehtimal olar.

**Məsələ 3.** 1,2,3,4,5,6,7,8,9 rəqəmlərindən düzəldilmiş bütün müxtəlif rəqəmli dördrəqəmli ədədlərin içərisindən biri təsadüfi olaraq seçilmişdir. Seçilmiş dördrəqəmli ədədin 1 rəqəmi ilə qurtaran ədəd olması ehtimalını tapın.

**Həlli.** 1,2,3,4,5,6,7,8,9 rəqəmlərindən heç bir rəqəm təkrar edilmədən düzəldilən dördrəqəmli ədədlər 9 elementdən 4 elementli aranjemanlardır. Ona görə də mümkün halların sayı olar. Həmin rəqəmlərdən düzəldilmiş sonu 1 rəqəmi ilə qurtaran dördrəqəmli ədədləri belə düzəltmək olar. 1 rəqəmini götürüb kənara qoyaq. 8 dənə 2,3,4,5,6,7,8,9 rəqəmlərindən heç bir rəqəm təkrar olunmadan mümkün bütün üçrəqəmli ədədləri düzəldək. Onlar 8 elementdən 3 elementli aranjemanlar olduqları üçün belə bütün üçrəqəmli ədədlərin sayı olar. Bu üçrəqəmli ədədlərin hər birinin sağ tərəfində 1 rəüəmli yazdıqda sonu 1 rəqəmi ilə qurtaran dördrəqəmli ədədlər alınacaqdır. Ehtimalın klassik tərifinə və (5) düsturuna görə

alınır.

**5. Həndəsi ehtimal**

Fərz edək ki, müstəvi üzərində qapalı məhdud  oblastı və tamamilə onun daxilində yerləşən qapalı məhdud oblastı verilmişdir.  oblastına atılmış nöqtənin  oblastına düşməsinin  ehtimalını tapmaq tələb olunur. Bu məsələni ehtimalın klassik tərifi ilə həll etmək olmaz. Çünki burada mümkün hallar  oblastının bütün nöqtələr çoxluğu, əlverişli hallar isə  oblastının bütün nöqtələr çoxluğu olduğu üçün həm əlverişli hallar sayı, həm də mümkün hallar sayı sonsuzdur.

Belə məsələləri həll etmək üçün ehtimalın həndəsi tərifindən istifadə olunur. Əvvəlcə qəbul edək ki,  oblastına atılan nöqtənin  oblastına düşməsinin  ehtimalı  oblastının sahəsi ilə düz mütənasib olub, onun förması və -da tutduğu yerdən asılı deyildir. Onda

sahə (1)

yazmaq olar (-mütənasiblik əmsalıdır). Xüsusi halda (1)-in hər iki tərəfində  əvəzinə  yazıb,  olduğunu nəzərə alsaq,

sahə

alınar. üçün bu ifadəni (1)-də yerinə yazaq:

 . (2)

(2) düsturu ilə hesablanan ehtimala **həndəsi ehtimal** deyilir.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, həndəsi ehtimal bu fəsildə §4-də ehtimalın tərifindəki I, II, III aksiomlarını ödəyir.

Burada həndəsi ehtimalın tərifi müstəvi üzərində, yəni 2-ölçülü fəzada verildi. Ümumi halda həndəsi ehtimal düsturu belə yazılır:

. (3)

Burada  ilə -nün ölçüsü,  ilə -nın ölçüsü işarə olunmuşdur. 1-ölçülü halda (3)-ün sağ tərəfindəki kəsrin surət və məxrəcində uzunluqlar, 3-ölçülü halda isə həcmlər durur.

**Məsələ 1. ** parçasından təsadüfi olaraq götürülmüş nöqtənin **** parçasından olması ehtimalını tapın.

**Həlli.** Burada , 

 olduğu üçün (3) düsturuna görə axtrılan ehtimal



olur.

**Məsələ 2.** İki tələbə müəyyən yerdə saat  ilə  arasında görüş təyin edirlər. Birinci gələn o birini 15 dəqiqə gözlədikdən sonra gedir. Hər tələbə görüş anını təsadüfi olaraq seçərsə, (saat  ilə  arasında), onların görüşmə ehtimalını tapın.

12

13

12

13



























Şəkil 4

**Həlli.** Məsələni həndəsi ehtimal düsturu ilə həll edəcəyik. Tələbələrin görüşə gəlmə anlarını  və ilə işarə edək. Məsələn, birinci tələbə saat -də gəlibsə, -in  qiymətini aldığı nəzərdə tutulur. Məsələnin şərtinə görə tələbələr  ilə  arasında görüş təyin etdikləri üçün ,  dəyişənləri ,  ikiqat bərabərsizliklərini ödəməlidirlər. Müstəvi üzərindəki  koordinat sistemində koordinatları bu ikiqat bərabərsizliklərin hər ikisini ödəyən nöqtələr çoxluğu  kvadratıdır. Deməli, bu məslədə  oblastı olaraq  kvadratı götürülməlidir. Bu kvadratın tərəfinin uzunluğu 1-ə bərabər olduğu üçün

sahə =sahə  kvadratı=1

Birinci tələbənin ikinci tələbə ilə eynin vaxtda və ya ondan tez gəlməsi  şərtinin ödənilməsi deməkdir. Şərtə əsasən tələbələrin görüşməsi üçün onların görüş anları arasındakı fərq  saatdan çox olmamalıdır. Bu isə  şərtinin ödənilməsi deməkdir. Beləliklə, bu halda tələbələrin görüşməsi üçün ,  dəyişənləri  şərtini ödəməlidir.

Oxşar mühakimə ilə alınır ki, ikinci tələbə birincidən tez gələn halda, onların görüşməsi üçün ,  dəyişənləri  şərtini ödəməlidir.

 müstəvisi üzərində koordinatları  və  bərabərsizliklərini ödəyən nöqtələr çoxluğu  altıbucaqlısı ilə təsvir olunur. Deməli, bu məslədə  oblastı həmin altıbucaqlıdır. Bu altıbucaqlının sahəsini tapaq:

Sahə=Sahə = Sahə -2 Sahə 

=1-2.

(2) düsturuna əsasən tələbələrin görüşmə ehtimalı tapılır:

.

**Kombinatorikanın əsas qaydaları**

Bir çox məsələlərin həllində müəyyən sayda obyektlərin mümkün yerləşmələrinin sayını və yaxud hər hansı bir hərəkətin yerinə yetirilməsinin mümkün hallarının sayını tapmaq lazım gəlir.Belə məsələlərə **kombinator məsələlər** deyilir.Kombinator məsələlərin əksəriyyəti kombinatorikanın iki əsas qaydası – **vurma və toplama** qaydalarının köməyilə həll olunur.

**Məsələ 1**.A şəhərindən B şəhərinə gəmi, Qatar, təyyarə və avtobusla getmək olar. B şəhərindən C şəhərinə isə avtobus və təyyarə ilə getmək olar. A şəhərindən C şəhərinə neçə üsulla getmək olar.

**Həlli**.A şəhərindən B şəhərinə 4 yolla getmək olar.Bu yollardan birini seçdikdən sonra C şəhərinə 2 yolla getmək olar.Deməli, A şəhərindən C şəhərinə 4.2=8 yolla getmək olar.

**Qayda**. Əgər hər hansı bir hərəkəti (məsələn, A şəhərindən B şəhərinə yolun seçilməsi) m üsulla, bundan sonra başqa bir hərəkəti (B şəhərindən C şəhərinə yolun seçilməsi) n üsulla yerinə yetirmək mümkün olarsa onda iki hərəkəti birlikdə m.n üsulla yerinə yetirmək olar.

Başqa sözlə, əgər obyektlər toplusundan hər hansı A obyektini m üsulla və hər bir belə seçimdən sonra digər B obyektini həmin topludan n üsulla seçmək olarsa, onda A və B seçimlərini (göstərilən qaydada) m.n üsulla yerinə yetirmək olar.

**Vurma qaydası**. Tutaq ki, k sayda hərəkəti bir-birinin ardınca yerinə yetirmək lazımdır. Əgər birinci hərəkəti n1 üsulla, ikincini n2 üsulla və s.k-nıncını nk üsulla yerinə yetirmək olarsa, onda k sayda hərəkəti n1.n2. . . nk üsulla yerinə yetirmək olar.

**Toplama qaydası**. Əgər iki hərəkət eyni zamanda bir-birini inkar edirsə və onlardan birini m sayda üsulla, digərini n sayda üsulla yerinə yetirmək olarsa ,onda onlardan ixtiyari birini m+n üsulla yerinə yetirmək olar.

**Məsələ2.** Futbol çempionatında 12 komanda iştirak edir.Qızıl və gümüş medallar neçə üsulla paylana bilər ?

**Həlli.** Qızıl medalı 12 komandadan hər biri (birinci hərəkət) ala bilər.Gümüş medalı isə (ikinci hərəkət) qalan 11 komandadan hər biri ala bilər.Beləliklə, qızıl və gümüş medallar 12.11=132 üsulla paylana bilər

**Məsələ 3**. Kitab rəfində 10 ədəd ehtimal və 20 ədəd riyazi statistika dərsliyi vardır.Eyni adlı iki dərsliyi seçmək lazımdır.Bunu neçə üsulla etmək olar ?

**Həlli**.Birinci hərəkət ehtimal, ikinci hərəkət isə riyazi statistika dərsliyinin seçilməsi olsun. Göründüyü kimi hər iki hərəkət eyni zamanda bir-birini inkar edir.Ehtimaldan iki dərsliyi 10.9=90 üsulla, riyazi statistikadan isə 20.19=380 üsulla seçmək olar.Toplama qaydasına görə eyni adlı iki dərsliyi 90+380=470 üsulla seçmək olar.

**ƏDƏBİYYAT**

1. M.M.Səbzəliyev “Ali riyaziyyatdan mühazirələr” II hissə, Bakı-2014,

XI fəsil **§**6.

1. M.M.Səbzəliyev “Ali riyaziyyatdan məsələlər” II hissə, Bakı-2016,

XII fəsil §2.

**Mühazirə № 3.** Şərti ehtimal və onun xassələri. Ehtimallarn toplanması və vurulması. Tam ehtimal və Bayes düsturları

**Qısa icmalı:**

Hadisələrin asılılığı. Külliyyatca asılı olmayan hadisələr və onlardan heç olmazsa birinin baş vermə ehtimalı. Bernşteyn misalı. Şərti ehtimal anlayışı,onun xassələri. Ehtimalların toplanması və vurulması teoremi. Hadisələrin tam qrupu. Tam ehtimal və Bayes düsturları.

**Hadisələrin asılı olub-olmaması. Şərti ehtimal və onun xassələri.**

**Bernşteyn misalı. Ehtimallarn toplanması və vurulması**

Məlumdur ki, hər bir təsadüfi hadisəyə müəyyən komp­leks şərtlər daxilində aparılan sınağın, təcrübənin və ya müşa­hidənin nəticəsi kimi baxmaq olar və belə hadisənin ehtimalı həmin kompleks şərtlər çərçivəsində təyin olunur.

Elə təsadüfi hadisələr də vardır ki, birinin baş verib-verməməsi digərinin baş verib-verməməsindən bilavasitə asılıdır. Belə olduqda asılı və ya asılı olmayan hadisələr anlayışını vermək zərurəti ortaya çıxır.

**Tərif.** Əgər müəyyən kompleks şərtlər daxilində  və  hadisəsinin eyni zamanda baş verməsi ehtimalı bu hadisələrin ehtimalları hasilinə bərabərdirsə, yəni

,

onda  və  hadisələri **asılı olmayan hadisələr** adlanır.

**Misal 1.** Tutaq ki, ardıcıl iki dəfə atılan bir zərdə birinci dəfə düşən üzdə 6 xalın olması , ikinci dəfə də düşən üzdə 6 xalının olması  hadisəsidir. Onda

 və .

Belə bir təklif doğrudur.

**Teorem.** Əgər  və  hadisələri asılı deyildirsə, onda və ,  və ,  və  hadisələri də asılı olmayan hadisələrdir.

**İsbatı.** Tutaq ki,  - yəqin,  - mümkün olmayan hadisələrdir.

Onda  və  olduğundan



Deməli, və  hadisələri asılı deyildir -qarşılıqlıdır, yəni  hadisəsi - dən asılı deyildirsə, onda  ha­disəsi də -dan asılı deyildir. Əlavə qeyd edək ki, ha­disə­lərin asılı olmaması münasibətini bilavasiitə yoxlamaq olmur. Real gerçəklikdə fiziki proseslər biri-birindən asılıdır. Lakin belə asılılıq kifayət qədər zəif olduqda, onları asılı olmayan proseslər kimi qəbul etmək olar, yəni onların asılı olmamasını **statistik** mənada başa düşmək lazımdır.

Əgər  və  hadisələri asılı deyilsə, onda  və  olduğundan alırıq ki,

,



Deməli,  və  asılı hadisələr deyildir.

Nəhayət, ,  olduğundan

,

.

Yəni A̅ və B̅ hadisələri asılı deyildir.

**Qeyd 1**. A1,A2,...,An hadisələrindən istənilən ikisi asılı olmadıqda onlara **cüt-cüt asılı olmayan hadisələr** deyilir.

P(Aj)=P()P(Aj), ≠j; ,j =1,2,…,n.

**Qeyd 2**. Əgər A1,A2,…,An hadisələri üçün

P() = P()P() ,

P( ) = P()P(Aj)P(Ak) ,

... ... ...

P(A1 A2 ... An) = P(A1)P(A2 ) ... P(An)

bərabərlikləri ödənilərsə, onda bu hadisələr **qarşılıqlı asılı olmayan hadisələr** adlanır. Təsadüfi hadisələrin asılı olmaması münasibətini ikidən çox hadisələr üçün də vermək olar.

**Təklif.**  hadisələrinin asılı olmaması üçün zəruri və kafi şərt

P( ) = p(A1).p(A2). . . p(An) olmasıdır.

**Qeyd 3**. Qarşılıqlı asılı olmayan hadisələr eyni zamanda cüt-cüt asılı olmayan hadisələrdir.

**Qeyd 4.** Ancaq hadisələrin cüt-cüt asılı olmamasından onların qarşılıqlı asılı olmaması alınmır.

**Bernşteyn misalı.** Üç üzü uyğun olaraq qırmızı, yaşıl və mavi rənglərlə rənglənmiş,dördüncü üzünə isə hər üç rəng çəkilmiş tetraedr müstəviyə atılır.

A,B və C ilə uyğun olaraq tetraedri müstəviyə atdıqda qırmızı,yaşıl və mavi rəngli üzlərin düşməsi hadisələrini işarə edık.

Hər üç rəng iki üzə çəkildiyinə görə P(A) = P(B) = P(C) = =

Digər tərəfdən P(AB) = P(AC) = P(BC) =

olduğundan A,B və C hadisələri cüt-cüt asılı olmayan hadisələrdir.

P(ABC) = = P(A)P(B)P(C)

bərabərliyi isə onların qarşılıqlı asılı olduğunu göstərir.

**Nəticə 1.** A1,A2, . . . ,An asılı olmayan hadisələr olarsa, onlardan götürülən ixtiyari r (r˂n) sayda Ai1, . . . . ,Air hadisələri də asılı olmayacaqdır.

**Nəticə 2**. Asılı olmayan A1,A2, . . . ,An hadisələrindən heç olmasa birinin baş verməsi ehtimalı

P(A1+...+An ) = 1 [1 – P(A1)][1 – P(A2)] . . . [1 P(An)]

kimi hesablanır.

**Nəticə 3**. Asılı olmayan A1,A2, . . . ,An hadisələrindən heç olmasa birinin baş verməməsi ehtimalı

P0 = (1 – P(A1))(1 – P(A2)) . . . (1 – P(An)) olar.

**Misal 2.** Üç atıcı hədəfə atəş açır.Onların hədəfi vurma ehtimalları uyğun olaraq p1=0.9, p2 =0.8, və p3=0.7 –yə bərabərdir.Hədəfin məhv olması üçün ona bir güllə dəyməsi kifayətdir.Atıcılar eyni zamanda atəş açarsa hədəfin məhv olma ehtimalını tapın.

**Həlli.** A1-birinci atıcının, A2-ikinci atıcının və A3-üçüncü atıcının hədəfi vurma hadisəsi olsun. Bu hadisələr asılı deyillər.Hədəfə heç olmasa bir güllə dəymə hadisəsini A ilə işarə edək. Onda üç hadisədən heç olmasa birinin baş vermə ehtimalı

P(A) = 1 – P( 1 – (10.9)(10.8)(10.7) = 0.994 olar.

1. **Şərti ehtimal**

İndiyə kimi  ehtimal fəzasında hadisələrin ehtimalları heç bir əlavə şərt qoyulmadan hesablanırdı.Belə hesablanan ehtimallar şərtsiz ehtimallar idi. Lakin bəzi hallarda bir çox hadisələrin ehtimallarını müəyyən əlavə şərtlər qoymaqla hesablamaq lazım gəlir. Başqa sözlə,  hadisəsinin ehtimalını  hadisəsinin baş verməsi şərti ilə tapmaq lazım gəlir.

**Tərif.** hadisənin baş verməsi şərtində  hadisəsinin baş vermə ehtimalına **şərti ehtimal** deyilir və  kimi işarə olunur.

Şərti ehtimalı hesablamaq üçün bu tərifə ekvivalent olan aşağıdakı tərifi qəbul etmək daha əlverişlidir.

**Tərif. ** hadisəsi ilə **** hadisəsinin hasilinin ehtimalının  hadisəsinin ehtimalına nisbətinə ***B* hadisəsinin baş verməsi şərtində *A* hadisəsinin şərti ehtimalı deyilir.**

Bu tərifə əsasən **** olduqda

 (1)

yaza bilərik. Bəzən  şərti ehtimalı üçün  işarəsindən də istifadə olunur.

(1) düsturundan alınır:

, ****. (2)

(2) düsturunda **** əvəzinə ,  əvəzinə isə **** yazıb,  olduğunu nəzərə alsaq,

, **** (3)

düsturu alınır.

(2)və (3) bərabərliklərinə **ehtimalları vurma teoremi** deyilir.

Praktikada çox vaxt  şərti ehtimalını (1) düsturu ilə deyil, başqa mühakimələr əsasında tapırlar.  və ya  şərti ehtimalları məlum olduqda  ehtimalını (2) və ya (3 ) düsturu ilə hesablayırlar.

**Məsələ.** Qutuda  dənə ağ ,  dənə qara kürə vardır. Hər dəfə 1 kürə götürməklə, qutudan ardıcıl olaraq 2 kürə çıxarırlar. Hər iki kürənin ağ olması ehtimalını tapın.

**Həlli**. Aşağıdakıiki hadisəni **** və ilə işarə edək:

{Çıxarılan birinci kürə ağdır},

{ Çıxarılan ikinci kürə ağdır }.

Onda **** hadisəsi üçün mümkün hallar sayı ** ,** əlverişlihallar sayı  olduğu üçün ehtimalın klassik tərifinə görə  olar. Çıxarılan hər iki kürənin ağ olması üçün **** hadisəsi baş vermək şərti ilə hadisəsi də baş verməlidir.

 şərti ehtimalını tapaq. **** hadisəsi baş verdiyi üçün qalan bütün kürələrin sayı , qalan ağ kürələrinsayı isə olar. Ehtimalın klassik tərifinə görə  olar.

İndi çıxarılan hər iki kürənin ağ olması ehtimalını (3) düsturu ilə tapmaq olar:



Qeyd edək ki, ehtimalları vurma teoremini ikidən çox ixtiyari sonlu sayda hadisələr üçün də ümumiləşdirmək olar.

***Şərti ehtimalın xassələri***

1. İstənilən  hadisəsinin ehtimalı mənfi olmayan ədəd olduğundan ;

2. 0 P(A/B)

3. P(Ω/A) =1;

4. P(A/B) + P(/B) =1;

5. P(V/B) =0;

6. (1) –də A=B olduqda (3) münasibətindən alırıq:;

7. Əgər -dirsə, onda  və



8. Əgər A1 A2 olarsa p(A1/B) ≤ p(A2/B).

**Teorem. ** hadisələri üçün  şərtləri ödənildikdə

 (4)

bərabərliyi doğrudur.

**İsbatı.** (4)-ün sağ tərəfini götürüb, ikincidən başlayaraq bütün vuruqlara (1) düsturunu tətbiq edək:



Teorem isbat olundu.

**Ehtimallarn toplanması teoremi.**  A və B hadisələrinin cəmi elə A+B hadisəsənə deyilir ki,o ya A,ya B,ya da A və B hər ikisi baş verdikdə baş versin. Əgər A və B uyuşmayan hadisələrdirsə,onda A+B hadisəsi bu hadisələrdən hər hansı birinin baş verməsidir. Tutaq ki, A və B uyuşmayan hadisələrdir,P(A) və P(B) məlumdur. P(A+B) – ni necə tapmalı?

**Teorem 1**.Uyuşmayan A və B hadisələrindən hər hansı birinin baş verməsi ehtimalı onların ehtimalları cəminə bərabərdir:

p(A + B) = P(A) + P(B) (1)

**Teorem 2.** Uyuşan A və B hadisələrindən heç olmazsa birinin baş vermə ehtimalı onların ehtimalları cəmi ilə onların birgə baş verməsi ehtimallarının fərqinə bərabərdir:

p(A + B) = P(A) + P(B) – p(AB) (2)

Xüsusi halda, əgər A və B hadisələri uyuşmayan olarsa, onda (2)- dən (1) alınır,belə ki, p(AB) = 0 olur.

Əgər A və B hadisələri asılı olmazsa, onda (2)- dən

p(A + B) = P(A) + P(B) – p(A)p(B) ,

əgər A və B hadisələri asılı olarsa, onda alarıq

p(A + B) = P(A) + P(B) – p(A)(B)

1. **Asılı olmayan hadisələr**

Bundan əvvəlki paraqrafdan məlumdur ki, **** olduqda

 (1)

düstruru , **** olduqda isə

 (2)

düsturu doğrudur.

**Tərif. ** və hadisələri üçün

 (3)

bərabərliyi doğru olduqda bu hadisələrə **asılı olmayan hadisələr** deyilir.

Tutaq ki, **** və asılı olmayan hadisələrdir. Onda (3) bərabərliyi doğrudur. **** olarsa, onda (1) ilə (3)-ü müqayisə edərək alırıq:

 (4)

Deməli, ** olduqda  və  hadisələrinin asılı olmaması üçün (4) bərabərliyinin ödənilməsi zəruri və kafi şərtdir**.

**** olduqda isə (2) ilə (3)-ü müqayisə edərək,

 (5)

olduğunu aliriq. Yəni ** olduqda  və -nin asılı olmaması üçün (5) şərtinin ödənilməsi zəruri və kafidir**.

Göstərmək olar ki, uyuşmayan hadisələr asılı hadisələrdir. Doğrudan da, **** və  uyuşmayan hadisələr olduqda bu hadisələrdən birinin baş verməsi o birinin baş verməməsi deməkdir. Ona görə  və  şərti ehtimalları hər ikisi sıfra bərabərdirlər:

. (6)

Digər tərəfdən mümkün olmayan hadisə istənilən hadisə ilə uyuşan hadisə hesab edildiyi üçün həm **,** həm də **** olmalıdır. Doğrudan da, bu şərtlərdən biri və ya hər ikisi ödənilməsəydi **** ilə uyuşan hadisə olardı. Buradan və (6)-dan alınır ki, (4), (5) şərtlərindən heç biri ödənilmir. Deməli, **** ilə  asılı olan hadisələrdir.

İkidən çox sonlu sayda hadisələrin də asılı olmamasından danışmaq olar.

**Tərif. ** hadisələrindən hər biri yerdə qalan hadisələrin hər birindən və onların bütün mümkün hasillərindən asılı olmadıqda onlara **qarşılıqlı asılı olmayan** və ya sadəcə olaraq **asılı olmayan** hadisələr deyilir.

Asılı olmayan hadisələr cüt-cüt asılıl olmayan hadisələrdir. Lakin bunun tərsi, ümumiyyətlə desək, doğru deyil.

1. **Asılı olmayan hadisələrə aid məsələ həlli**

Belə bir məsələyə baxaq.

**Məsələ1. ** və  ədədlərindən biri təsadüfi olaraq götürülür.  ilə Götürülən ədəd -ya bölünür};  hadisəsi işarə olunmuşdur. **** hadisələrinin qarşılıqlı asılı olub-olmadıqlarını təyin edin.

**Həlli. ** hadisəsi üçün **** və **** ədədlərinin,  hadisəsi üçün  və  ədədlərininn ,  üçün  və  ədədlərinin seçilməsi əlverişli hallardır. Ehtimalın klassik tərifinə görə



olur.

Əvvəlcə **** hadisələrinin cüt-cüt asılı olub olmadıqlarını yoxlayaq. Bunun üçün **** hadisələrinin ehtimallarını hesablayaq. Bu hadisələr  ={Götürülən ədəd həm -yə həm də -ə bölünür}={Götürülən ədəd -ya bölünür}, ****Götürülən ədəd -a bölünür}, **** Götürülən ədəd -ə bölünür} şəklində olduqları üçün

****

olur. Göründüyü kimi

****



bərabərlikləri doğrudurlar. Deməli **** hadisələri cüt-cüt asılı deyillər. Lakin bu hadisələr qarşılıqlı asılı olmayan hadisələr deyillər. Doğrudan da , onlar qarşılıqlı asılı olmayan hadisələr olsaydı həm də

****

bərabərlikləri doğru olmalıydı. Aydındır ki, ****{Götürülən ədəd -a bölünür} hadisəsi üçün **.** Lakin **, ** olduğu üçün ** ** alınır və **** bərabərliyi ödənilmir.

Biz göstərdik ki, **** hadisələri cüt-cüt asılı deyillər, lakin qarşılıqlı asılıdırlar.

İkidən çox sayda asılı olmayan **** hadisələri üçün

****

düsturu doğrudur.

**Məsələ 2.** Üç atıcı bir-birlərindən asılı olmayaraq eyni zamanda bir hədəfə atəş açırlar. Atıcıların hədəfi vurma ehtimalları  və -dir. Atıcıların üçünün də eyni zamanda hədəfi vurma ehtimalını tapın.

**Həlli.**   birinci,  ikinci,  üçüncü atıcının hədəfi vurma hadisəsi ,  isə atıcıların üçünün də eyni zamanda hədəfi vurma hadisəsi olsun. Onda **** olar və şərtə görə ****  asılı olmayan hadisələr olduqları üçün

****

olar.

**4.Tam ehtimal və Bayes düsturları**

Fərz edək ki, cüt-cüt uyuşmayan **** hadisələri tam qrup təşkil edirlər.Bu o deməkdir ki,

 (1)

bərabərliyi doğrudur. Tutaq ki,  elə hadisədir ki, **** hadisələrinin hər biriilə eyni zamanda baş verə bilir. Hər bir  hadisəsinin baş verməsinin  ehtimalı və   şərti ehtimalları məlumdurlar.  hadisəsinin ehtimalını tapmaq tələb olunur.

(1)-ə əsasən yaza bilərik:

 (2)

 və  olduğu üçün (2) aşağıdakı şəklə düşür:

 . (3)

Ehtimalın additivlik aksiomuna görə (3)-dən alırıq:

. (4)

Ehtimalların vurma teoreminə görə

 olduğu üçün (4)-ü

 (5)

şəklində yazmaq olar. (5)-ə **tam ehtimal** düsturu deyilir.

İndi isə  və  ehtimalları məlum olduqda  şərti ehtimallarından hər birini tapmağa imkan verən düsturu çıxaraq.

Məlumdur ki,



düsturu doğrudur. Buradakı sonuncu bərabərlikdən  tapaq:

. (6)

(6)-ya **Bayes düsturu** deyilir.

(6)-nın sağ tərəfində (5) tam ehtimal düsturunu nəzərə alıb Bayes düsturunu



şəklində də yazmaq olar.

**Məsələ.** Eyni formalı üç qutudanbirincidə 20 ağ, ikincisində 10 ağ, 10 qara, üçüncüsündə 2 ağ, 18 qara kürə vardır. Bu qutulardan biri təsadüfi olaraq götürülür və bu qutudan çıxarılan kürə ağ olur. Çıxarılan ağ kürənin birinci qutudan olması ehtimalını tapın.

**Həlli.** Birinci qutunungötürülməsi hadisəsini , ikinci qutunun götürülməsi hadisəsini , üçüncü qutunun götürülməsi hadisəsini  ilə işarə edək. Bu qutular eyni formalı olduqlarından



olur. Çıxarılan kürənin ağ olması hadisəsini  ilə işarə edək. Onda ,,  uyğun olaraq birinci, ikinci , üçüncü qutudan çıxarılan kürənin ağ olması hadisələridir. Aydındır ki,

 olar.

 olan hal üçün (5) tam ehtimal düsturuna əsasən



Çıxarılan ağ kürənin birinci qutudan olması hadisəsi  hadisəsidir.  şərti ehtimalını (6) Bayes düsturundan  götürməklə tapmaq olar:



**ƏDƏBİYYAT**

1. M.M.Səbzəliyev “Ali riyaziyyatdan mühazirələr” II hissə, Bakı-2014,

XI fəsil **§**7-**§**9.

1. M.M.Səbzəliyev “Ali riyaziyyatdan məsələlər” II hissə, Bakı-2016,

XII fəsil §3, § 4.

**Mühazirə № 4.** Təkrar sınaqlar ardıcıllığı. Bernulli, Muavr-Laplas və asimptotik Puasson teoremləri

**Qısa icmalı:**

Ardıcıl təkrar sınaqlar, Bernulli və Muavr-Laplasın lokal limit və inteqral teoremləri. Ən ehtimallı ədəd anlayışı və onun hesablanma üsulları. Nadir hadisələr qanunu və asimptotik Puasson teoremi.

1. **Asılı omayan sınaqlar ardıcıllıgı. Bernulli düsturunun çıxarılışı**

Fərz edək ki, hər hansı bir sınağın yalnız iki nəticəsi vardır: ya  hadisəsi baş verir ya da baş vermir.  hadisəsinin baş vermə ehtimalı  baş verməməsi ehtimalı isə  ədədidir.

Tutaq ki, bir-birindən asılı olmayan  sayda sınaq aparılır. Bu sınaqlarda  hadisəsinin düz   dəfə baş verməsinin  ehtimalını tapmaq tələb olunur.

 sayda sınaqlardan yalnız  saydasında  hadisəsi baş verirsə, onda qalan  sayda sınaqlarda onun əksi olan  hadisəsi baş vermiş olur. Lakin  sayda sınaqlarda  hadisəsinin  dəfə baş verməsi müxtəlif ardıcıllıqlarla baş verə bilər. Onları belə yazaq:



Aydındır ki, belə variantların sayı  qədər olacaqdır.  sınaqdan  dənəsində -nın baş verməsi hadisəsinə  sayda belə hadisələrin cəmi kimi baxmaq olar. Hadisələrin hasilləri üçün yerdəyişmə qanunu doğru olduğundan və sınaqlardakı hadisələr asılı olmadıqlarından bu  sayda hadisələrin hamısının ehtimalları bərabərdirlər:

****

Yuxarıda qeyd olunanlardan və ehtimalın additivlik aksiomundan alınır ki,



düsturu doğrudur. Belələiklə biz göstərdik ki, asılı olmayan  sınaqda  hadisəsinin düz  dəfə baş verməsi ehtimalı üçün

**** (1)

düsturu doğrudur. (1)-ə **Bernulli düsturu** deyilir.

 qüvvətini Nyuton binomu düsturu üzrə açaq:



Göründüyü kimi, (1) düsturunun sağ tərəfindəki ifadə  qüvvətinin Nyuton binomu düsturu üzrə açılışında -in əmsalına bərabərdir. Ona görə də (1)-ə bəzən **ehtimalların binomial paylanma qanunu**,  və  ədədlərinə isə bu **paylanmanın parametrləri** deyilir.

Nyiton binomu düsturuna və (1)-ə əsasən yaza bilərik:

 (2)

Digər tərəfdən  olduğu üçün (2)-dən

 (3)

olduğu alınır. (3) onu göstərir ki, binomial ehtimalların cəmi vahidə bərabərdir. Bu isə o deməkdir ki, asılı olmayan  sınaq nəticəsində  hadisəsinin  dəfə baş verməsindən ibarət olan bütün hadisələr çoxluğu tam sistem təşkil edir. n sınaqda

А hadisəsinin k dəfədən az baş verməsi ehtimalı

 (4)

k – dan çox sayda baş verməsi ehtimalı

 (5)

ən azı k dəfə baş verməsi ehtimalı

 (6)

ən çoxu к dəfə baş vərməsi ehtimalı

 (7)

düsturları ilə tapıla bilərlər.

ehtimalının ən böyük qiymət aldığı  ədədinə binomial paylanmanın modası və ya ən böyük ehtimallı ədədi deyilir.

 olduqda ən böyük ehtimallı  ədədi



ikiqat bərabərsizliyindən tam ədəd kimi təyin oluna bilər.Bu ikiqat bərabərsizliyin sərhədləri fərqi 1-ə bərabərdir.

 tam ədəd olmadıqda ən böyük ehtimallı ədəd bir dənədir: , burada  işarəsi -in tam işarəsini göstərir.  tam ədəd olduqda iki dənə ən

böyük ehtimallı ədəd vardır: 

**2.Bernulli düsturunun tətbiqi ilə məsələlər həlli**

**Məsələ 1.** Qutuda 20 ağ və 10 qara kürə vardır. Qutudan dalbadaq 4 kürə çıxarılır. Hər dəfə kürələr qarışdırıldıqdan sonra növbəti kürə çıxarılır. Çıxarılan 4 kürədən ikisinin ağ olması ehtimalını tapın.

**Həlli.**  Cəmi 4 sınaq aparılır və sınaqlar bir-birlərindən asılı deyillər: . Hər sınaq zamanı ağ kürənin çıxarılma ehtimalı ehtimalın klassik tərifi əsasında tapıla bilər: . Onda  olar. (1) Bernulli düsturuna görə alırıq:

.

**Məsələ 2.** metal pul 6 dəfə hamar döşəmə üzərinə atılır. Pulun gərb üzünün 3 dəfədən çox olmayaraq yuxarı düşməsi hadisəsinin ehtimalını tapın.

**Həlli.** Cəmi 6 sınaq aparılır və sınaqlar bir-birlərindən asılı deyillər. Hər bir sınaq zamanın pulun gərb üzünün yuxarı düşmə ehtimalı -dir. Onda  olar. Pulun gərb üzünün 3 dəfədən çox olmayaraq yuxarı düşməsi hadisəsinə aşağıdakı hadisələrin cəmi kimi baxmaq olar:

-6 sınaqda pulun gərb üzü sıfır dəfə yuxarı düşür, yəni 6 sınaqdan heç birində gərb üzü yuxarı düşmür;

-6 sınaqda pulun gərb üzü 1 dəfə yuxarı düşür;

-6 sınaqda pulun gərb üzü 2 dəfə yuxarı düşür;

-6 sınaqda pulun gərb üzü 3 dəfə yuxarı düşür.

Bernulli düsturuna görə



 olduğu üçün ehtimalın additivlik aksiomuna görə



**Məsələ3.** Qutuda 10 ağ və 40 qara kürə vardır. Qutudan ardıcıl olaraq 14 kürə çixarılır və rənginə baxmayaraq qutuya qaytarılır. Ağ kürə çıxması hadisəsi üçün ən böyuk ehtimallı ədədi tapın.

**Həlli:** Aydındır ki, ağ kürə çıxması ehtimalı



olar. Digər tərəfdən  tam ədəd olduğu üçün iki dənə ən böyük ehtimallı ədəd vardır:





**Məsələ 4.** Atıcının hədəfi vurma 0,7-dir. 25 dəfə atəş açılmışdır. Hədəfi vurma hadisəsinin ən böyük ehtimallı ədədini tapın.

**Həlli:** Şərtə görə



kəsr ədəd olduğundan bir dənə ən böyük ehtimallı ədəd vardır:



**3.Asimptotik Puasson düsturunun çıxarılışı**

Əvvəlki paraqrafdan məlumdur ki, asılı olmayan  sınaq zamanı  hadisəsinin düz  dəfə baş verməsi ehtimalı aşağıdakı Bernulli düsturuna əsasən hesablanır:

. (1)

Burada  ilə  hadisənin hər sınaqda baş vermə ehtimalı,  ilə  ədədi işarə olunmuşdur. -in böyük qiymətlərində (1)-in sağ tərəfini hesablamaq çətin olur. Ona gbörə də -in kifayət qədər böyük qiymətlərində (1)-in sağ tərəfini, qiyməti nisbətən asan hesablanan və (1)-in sağ tərəfindən az fərqlənən ifadə ilə əvəz edilər. Bu məqsədlə müxtəlif asimptotik düsturlar alınmışdır. Belə düsturlardan biri də asimptotik Puasson düsturudur.

**Teorem (Puasson).**  şərtində  olarsa, onda hər bir sonlu  ədədi üçün

 (2)

düsturu doğrudur.

**İsbatı.**  ilə işarə edək. Şərtə görə . Bernulli düsturunu yazaq və onun sağ tərəfini aşağıdakı şəkildə çevirək:



 . (3)

Aşağıdakı limitlərə baxaq:



 şərtində (3) bərabərliyinin hər iki tərəfində limitə keçib, yuxarıdakı üç limiti nəzərə alsaq, (2) düsturu alınar

.

Teorem isbat olundu.

Aydındır ki,  olması üçün  çox kiçik olmalıdır. Ona görə də (1) Puasson düsturundan -in kifayət qədər böyük və -nin kifayət qədər kiçik qiymətlərində istifadə edirlər. Praktikada Puasson teoremindən

 (4)

təqribi bərabərliyi vasitəsi ilə istifadə edirlər.

***Qeyd*** *.* Puasson teoremini *m* sonlu olduqda isbat etdik. Bu teorem  olduqda da doğrudur. Kifayət qədər kiçik p-lər böyük n-lər üçün Puasson düsturunu nadir hadisələr qanunu da adlandırırlar.

**4.Asimptotik Puasson düsturunun tətbiqi ilə məsələ həlli**

Məlumdur ki, aşağıdakı asimptotik Puasson düsturu doğrudur:

 .

Bu düstura binomial paylanmanın Puasson yaxınlaşması da deyirlər. Prakti-kada ondan n 100 və np 30 olduqda istifadə etmək əlverişlidir.

**Məsələ 1.**  hadisəsinin baş vermə ehtimalı -dir. Asılı olmayan 1000 sınaqda  hadisəsinin 4 dəfə baş vermə ehtimalını tapın.

**Həlli.** Şərtə görə ; , . Aydındır ki,  olar. Axtarılan ehtimalı Bernulli düsturu üzrə hesabla-maq istəsək,



ədədi ifadəsinin qiymətini tapmalıyıq. Bu praktiki cəhətdən çox çətindir.  olduğu üçün -ün təqribi qiymətini (4) düsturu ilə tapmaq əlverişlidir. Doğrudan da, bu düstura əsasən asanlıqla



**Məsələ 2.**  n=2000 və p=0,001 olduqda Pn(2) və Pn(3) ehtimallarını hesabla-malı.

n böyük ədəd, p kiçik ədəd və np=2=λ olduğundan (2) və ya (3) bərabərliyinə görə

**Muavr – Laplasın lokal limit teoremi**

İlk baxışdan sadə görünən Bernulli düsturu



sınaqların sayı *n* və *k* ədədləri kifayət qədər böyük olduqda mürəkkəb hesablamalara gətirib çıxarır. Ona görə də bu düsturu əvəz edəcək, müəyyən dəqiqliklə hesablamanı verəcək təqribi (asimptotik) düsturların axtarılması zərurəti ortaya çıxır. Belə asimptotik düsturları Muavr-Laplasın lokal limit teoremindən və Puasson teoremindən almaq olur.

**Teorem (Muavr-Laplas).** Əgər asılı olmayan sınaqlar zamanı hər hansı  hadisəsinin baş verməsi ehtimalı *p* sabitdirsə və *0 < p <1* -dirsə, onda  hadisəsinin *n* sınaq zamanı *k* dəfə baş verməsi ehtimalı üçün

 **(9)**

doğrudur, burada  və *x* müəyyən sonlu parçada də­yiş­dikdə bütün  qiymətlərində (9) yığılması müntəzəmdir.

**Nəticə.** (9) münasibətindən belə bir asimptotik düs­tur alınır:

 **(10)**

***Qeyd.***\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  funk­si­ya­sının qiymətlər cəd­­və­­­li var və bu cəd­­vəl dərs­­liyin axı­rın­da ve­ri­lir.

Bu funk­siya­nın qrafiki **Qauss əy­ri­si** ad­­lanır. *n* sonsuz art­dıqda -lar Qauss əy­­risinin ordi­natlarına ya­xınlaşır.

О



*х*

**Şəkil 1**

**Mühazirə № 6.** Təsadüfi kəmiyyətlər. Diskret təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu və paylanma funksiyası. Bəzi diskret paylanmalar

**Qısa icmalı:**

Təsadüfi kəmiyyət anlayışı və onun növləri. Diskret təsadüfi kəmiyyət, onun paylanma qanunu və paylanma çoxbucaqlışı. Paylanma funksiyasının tərifi və onun qrafiki. Diskret paylanmalara nümunələr.

1. **Təsadüfi kəmiyyətin tərifi və növləri**

Ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarından biri də təsadüfi kəmiyyətdir. Adından göründüyü kimi, təsalüfi kəmiyyət bu və ya digər amilin təsiri ilə müxtəlif qiymətlər ala bilər. Ona görə də təsadüfi kəmiyyətin hansı qiymət ala biləcəyini əvvəlcədən qəti demək mümkün deyildir. Lakin təsadüfi kəmiyyətin ala biləcəyi qiymətlər çoxluğu qabaqcadan göstərilə bilər. Bu çoxluq sonlu, hesabi və ya qeyri-hesabi ola bilər.

**Tərif.** Təsadüfi kəmiyyət sonlu və ya hesabi sayda izolə edilmiş  qiymətlərini alırsa, onda ona **diskret təsadüfi kəmiyyət** deyilir.

Məsələn, 1 nərd zərini1 dəfə hamar lövhə üzərinə atmaqdan ibarət olan sı-naqda yuxarı üzdə düşən xalın sayını göstərən təsadüfi kəmiyyəti  ilə işarə edək. Bu təsadüfi kəmiyyət yalnız 1,2,3,4,5,6 qiymətlərini ala bilər. Deməli  diskret təsadüfi kəmiyyətdir.

**Tərif.** Təsadüfi kəmiyyətin aldığı qiymətlər hər hansı sonlu və ya sonsuz aralıqdırsa, onda ona **kəsilməz təsadüfi kəmiyyət** deyilir.

Məsələn,  parçasından təsadüfi olaraq götürülmüş iki nöqtə arasındakı məsafəni  ilə işarə edək.  təsadüfi kəmiyyətdir və bu təsadüfi kəmiyyət 0 ilə 2 arasındakı istənilən qiymətləri ala bilər. Ona görə də  kəsilməz təsadüfi kəmiyyətdir.

İndi isə təsadüfi kəmiyyətin ciddi riyazi tərifini verək. Əvvəlcədən qeyd edək ki, təsadüfi kəmiyyət müəyyən elementar hadisələr fəzasında təyin olunmuş funksiyadır. Başqa sözlə. təsadüfi kəmiyyət elementar hadisələr fəzasından olan hər bir elementar hadisəyə müəyyən bir ədədi qarşı qoyan uyğunluqdur.

Tutaq ki,  ehtimal fəzası verilmişdir. Burada - elementar hadisələr fəzası, - onun - cəbri,  -isə ehtimal funksiyasıdır. Fərz edək ki,  elementar hadisələr fəzasında təyin olunmuş, həqiqi qiymətli  funksiyası verilmişdir. - istənilən həqiqi ədəd olsun.  şərtini ödəyən elementar hadisələr çoxluğunu  və ya qısa şəkildə  kimi işarə edək. Məsələn, sınaq bir nərd zərinin hamar lövhə üzərinə atılması, ={zərin yuxarı üzündə  xalı düşür} hadisəsi olduqda elementar hadisələr fəzası  olar. -da təyin olunmuş  funksiyasına baxaq və  götürək. Onda  olar.

**Tərif.**  elementar hadisələr fəzasında təyin olunmuş və istənilən həqiqi  ədədi üçün  şərtini ödəyən həqiqi qiymətli  funksiyasına **təsadüfi kəmiyyət** deyilir.

**2. Təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası və onun xassələri**

Məlumdur ki,  ehtimal funksiyası - cəbrində təyin olunmuşdur.  təsadüfi kəmiyyət olduqda  olduğu üçün -in də ehtimalı təyin olunmuşdur.

**Tərif.**  təsadüfi kəmiyyətinin -dən kiçik qiymətlər alması hadisəsinin ehtimalına bu **təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası** deyilir və

 (1)

kimi işarə olunur.

Göstərmək olar ki, - cəbrindən olan hər bir hadisənin əksi olan hadisə də -ə daxildir. Doğrudan da, -ə daxil olan hər hansı bir  hadisəsi götürək.  və ,  olmasından və - cəbrinin tərifindən çıxır ki, . Deməli,  hadisəsi ilə birlikdə onun əksi olan  hadisəsi də -ə daxildir. Ehtimalın məlum xassəsinə görə



olduğu alınır.











Ədəd oxu üzərində  şərtini ödəyən istənilən iki  nöqtələri götürək. Aydındır ki,  və  hadisələri uyuşmayandırlar və

 (2)

bərabərliyi doğrudur. Ehtimalın additivlik aksiomuna görə (2)-dən alırıq:

 (3)

(1)-ə əsasən (3)-ü aşağıdakı kimi yazmaq olar:

 (4)

(4) bərabərliyi onu ifadə edir ki,  təsadüfi kəmiyyətinin  yarımintervalından qiymətlər alma ehtimalı bu təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyasının həmin yarımintervalın sağ ucundakı qiyməti ilə sol ucundakı qiymətlərinin fərqinə bərabərdir.

İndi isə paylanma funksiyasının bəzi xassələrini qeyd edək.Tutaq ki,  hər hansı bir  təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasıdır. (4) düsturunda  yazaq. Onda aşağıdakı düstur alınır:

.

şərtində sonuncu bərabərliyin hər iki tərəfində limitə keçək:

. (5)

Aydındır ki,  kəsilməyən funksiya olduqda  olur və (5) bərabərliyi aşağıdakı şəklə düşür:

. (6)

(6) onu göstərir ki,  təsadüfi kəmiyyətinin  paylanma funksiyası kəsilməyən olduqda bu təsadüfi kəmiyyətin konkret bir  qiymətini alması hadisəsinin ehtimalı sıfra bərabərdir. Bu təklifi “mümkün olmayan hadisənın ehtimalı sıfra bərabərdir” təklifindən fərqləndirmək lazımdır. Paylanma funksiyası kəsilməyən  təsadüfi kəmiyyətinin konkret bir  qiymətini alması mümkündür, lakin həmin qiyməti alması ehtimalı sıfra bərabərdir.

**3. Paylanma funksiyasının xassələri. Mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər**

Qarşıya belə bir sual çıxır. Hansı həqiqi qiymətli funksiyalar təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma funksiyaları ola bilərlər? Aşağıdakı teorem bu suala cavab verir.

**Teorem.**  funksiyasının müəyyən bir  təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası ola bilməsi üçün bu funksiyanın aşağıdakı 3 şərti ödəməsi zəruri və kafidir:

**I.  funksiyası azalmayandır;**

**II.  funksiyası**

****

****

**şərtlərini ödəyir.**

**III.  funksiyası hər bir nöqtədə soldan kəsilməyəndir, yəni istənilən  nöqtəsi üçün**

****

**bərabərliyi doğrudur.**

Bu teoremin isbatına Ə.Şahbazov, “Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika”, Bakı-1973 kitabında baxmaq olar.

**4.Təsadüfi kəmiyyət və onun paylanma funksiyasına aid məsələlər həlli**

**Məsələ 1. ** təsadüfi kəmiyyəti yalnız -1, 0, 1 qiymətlərini alır. Bu təsadüfi kəmiyyət -1 qiymətini 0,2 ehtimalı ilə, 0 qiymətini 0,3 ehtimalı ilə, 1 qiymətini isə 0,5 ehtimalı ilə alır. **** təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasını tapın.

**Həlli.** Məlum olduğu kimi paylanma funksiyasının təyin olunduğu ümumi düstur belədir:((1) düsturuna bax!). Bütün ədəd oxunu aşağıdakı 4 hissəyə bölək:

.

Verilən təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyasını yazmaq üçün -in bu 4 aralıqların hər birindən aldığı qiymətləri tapmaq lazımdır.

1) **** təsadüfi kəmiyyəti -1-dən kiçik qiymət almadığı üçün  olduqda  mümkün olmayan hadisədir. Ona görə  olduqda . Yəni ** olduqda  olur**.

2) olduqda  hadisəsi **-**in -1 qiymətini alması deməkdir: . Buradan və ****-in -1 ehtimalını 0,2 ehtimalı ilə alması şərtindən çıxır ki,  olduqda . Yəni ** olduqda  olur**.

3)  olduqda  hadisəsi ****-in -1 və 0 qiymətlərindən birini alması deməkdir. . Buradan, ehtimalın additivlik xassə-sindən və məsələnin şərtindən   olduğu alınır. Deməli, ** olduqda  olur**.

4)  olduqda  hadisəsi ****-in -1,0, 1 qiymətlərindən birini alması deməkdir:

.

Buradan



Deməli, ** olduqda  olur**.

Bu 4 halda alınan nəticələri birləşdirərək alırıq ki, verilən **** təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası aşağıdakı düstur ilə təyin edilir:



**ƏDƏBİYYAT**

1. M.M.Səbzəliyev “Ali riyaziyyatdan mühazirələr” II hissə, Bakı-2014,

XI fəsil **§**12.

1. M.M.Səbzəliyev “Ali riyaziyyatdan məsələlər” II hissə, Bakı-2016,

XII fəsil §6.

**1. Təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu. Diskret paylanmalar**

Təsadüfi kəmiyyətin təyin olunması üçün onun ala biləcəyi qiymətlər çoxluğu və bu qiymətləri alma ehtimalları məlum olmalıdır. Paylanma funksiyası təsadüfi kəmiyyəti bu mənada xarakterizə edən vasitələrdən biridir. Təsadüfi kəmiyyətin ala biləcəyi qiymətlərlə, bu qiymətləri alma ehtimalları arasındakı əlaqə başqa üsullarla da verilə bilər.

**Tərif.** Təsadüfi kəmiyyətin ala bildiyi qiymətlərlə onlara uyğun ehtimallar arasında əlaqə yaradan hər bir münasibətə **təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu** deyilir.

Təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanununun iki növü şərh olunacaqdır: 1)Diskret paylanmalar; 2) Kəsilməz paylanmalar. Əvvəlcə diskret paylanmalar üzərində dayanaq.

Tutaq ki, diskret  təsadüfi kəmiyyətinin aldığı sonlu və ya hesabi sayda  qiymətləri və bu qiymətləri alma ehtimalları ,

 ,  verilmişdir.  ,  hadisələri cüt-cüt uyuşmayan olub , tam qrup təşkil edirlər. Ona görə də  təsadüfi kəmiyyəti  sayda qiymətlər aldıqda

 (1)

hesabi sayda qiymətlər aldıqda isə

 (2)

şərti ödənilməlidir.

Diskret təsadüfi kəmiyyətlərin belə paylanma qanununu çox vaxt aşağıdakı cədvəl şəklində verirlər:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| təsadüfi kəmiyyətinin ala bildiyi qiymətlər |  |  | ... |  | ... |
| Bu qiymətləri alma ehtimal-ları |  |  | ... |  | ... |

Bu cədvəl  diskret dəsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanununu ifadə edir. Ona **diskret təsadüfi kəmiyyətin ehtimallarının paylanma cədvəli** deyilir.

Bəzən  təsadüfi kəmiyyətinin  qiymətini  ehtimalı ilə almasını  kimi yox,  kimi yazırlar.  diskret təsadüfi kəmiyyətinin ehtimallarının paylanma cədvəli verildikdə onun paylanma funksiyası

 (3)

düsturu ilə təyin edilir. Qeyd edək ki, (3) düsturu ilə təyin olunan F(x) funksiyası hər bir nöqtəsində kəsiləndir. Hər bir nöqtəsində F(x) funksiyasının sıçrayışı

ədədinə bərabərdir:

**Məsələ.** Üç gülləsi olan ovçu hədəfi vurana və ya gülləsi qurtarana qədər hədəfə atəş açır. Ovçunun hər hədəfdə atəşi vurma ehtimalı p=0,8-dir. Ovçunun işlətdiyi güllələrin sayını göstərən X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanununu yazın.

**Həlli.** X təsadüfi kəmiyyəti üç dənə 1,2,3 qiymətlərini ala bilər. Hədəf birinci atəşdə vurulduqda X təsadüfi kəmiyyəti 1 qiymətini, birinci atəşdə hədəf vurulmayıb, ikinci atəşdə vurulduqdaX təsadüfi kəmiyyəti 2 qiymətini, birinci, ikinci atəşlərdə hədəf vurulmadıqda X təsadüfi kəmiyyəti 3 qiymətini alır.

X=1 hadisəsi ovçunun birinci atəşdə hədəfi vurması deməkdir. Ona görə bu hadisənin ehtimalı 0,8 olar:

P(x=1)=0,8.

X=2 hadisəsi birinci atəşdə hədəfin vurulmayıb, ikinci atəşdə hədəfin vurulmasıdır. Ovçunun hədəfi vurmaması ehtimalı 1-p=1-0,8=0,2 olduğu üçün

P(X=2)=0,2·0,8=0,16 olar.

X=3 hadisəsi birinci, ikinci atəşlərdə hədəfin vurulmayıb, üçüncü atəşin açılmasıdır. Qeyd edək ki, üçüncü atəşdə güllə hədəfə dəyə də bilər, dəyməyə də bilər, ancaq üçüncü güllə də işlədilib. Bu halda

P(X=3)=0,2·0,2=0,04 olur.

Diskret X təsadüfi kəmiyyətinin ehtimallarının paylanma cədvəli aşağıdakı şəkildədir:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X | 1 | 2 | 3 |
| P | 0,8 | 0,16 | 0,04 |

Göründüyü kimi ehtimalların cəmi vahidə bərabərdir:

0,8+0,16+0,04=1.

**2. Diskret paylanmaların bəzi növləri (binomial paylanma, Puasson paylanması, həndəsi paylanma)**

Ehtimal nəzəriyyəsində ən çox rast gələn bəzi diskret paylanmaları göstəririk.

**1. Binominal paylanma.**   təsadüfi kəmiyyəti mümkün  qiymətlərini

 (4)

ehtimalı ilə aldıqda , ona **binominal qanunla paylanmış diskret təsadüfi kəmiyyət** deyilir.  və  ədədləri **binominal paylanmanın parametrləri** adlanırlar.

(4)-ün sağ tərəfi Bernuli düsturunun sağ tərəfi olduğundan (4)-ü belə də yazmaq olar:

 (5)

(1) və (3) -ə əsasən binominal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası

 (6)

düsturu ilə təyin edilir.

(6) düsturu ilə təyin edilən  funksiyası  nöqtələrində kəsiləndir.  funksiyasının hər bir  nöqtəsindəki sıçrayışı  ədədinə bərabərdir. Doğrudan da (6)-ya əsasən

.

**2. Puasson paylanması**.  diskret təsadüfi kəmiyyəti tam  qiymətlərini



ehtimalı ilə aldıqda , ona  parametrli **Puasson qanunu ilə paylanmış diskret təsadüfi kəmiyyət** deyilir.

**3. Həndəsi paylanma.**  təsadüfi kəmiyyəti tam  qiymətlərini



ehtimalı ilə aldıqda , ona  parametrli **həndəsi qanunla paylanmış diskret təsadüfi kəmiyyət** deyilir.

**Məsələ.** Bir partiya detaldan 10 % - i qeyri-standartdır. Təsadüfi olaraq 4 detal götürülür. Götürülmüş 4 detaldan qeyri standartların sayını göstərən  təsadüfi kəmiyyətinin binomial paylanma qanununu yazın.

**Həlli:** Götürülmüş 4 detaldan qeyri-standartların sayını göstərən  təsadüfi kəmiyyəti 0,1,2,3,4 qiymətlərini ala bilər.  -in 0 - a bərabər qiymət alması gö-türülmüş 4 detalın içərisində qeyri-standartının olmamasını göstərir.

 təsadüfi kəmiyyətinin 0,1,2,3,4 qiymətlərini alma ehtimallarını tapaq. Şərtə görə detalların 10 %- i qeyri-standart olduğundan bu partiya detaldan götürülmüş hər bir detalın qeyri-standart olması ehtimalı -dir. Bernulli dusturundan isti-fadə edək.

 olduğu üçün





Bu ehtimalların cəmi vahidə bərabər olmalıdır. Doğrudan da,



Qeyd edək ki, asılı olmayan  sınaqda  hadisəsinin baş verməsinin sayını göstərən  təsadüfi kəmiyyətinin  -ya bərabər qiymət alması ehtimalı



Bernulli düsturu üzrə tapıldıqda  diskret təsadüfi kəmiyyətinə binomial qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyət deyilir. Bu misalda verilən  təsadüfi kəmiyyəti aşa-ğıdakı binomial qanunla paylanmışdır:



1. **Təsadüfi kəmiyyətlər,onların növləri.** Yuxarıda qeyd etdik ki, hər bir sınaq və ya müşa­hi­dənin nəticəsinə təsadüfi hadisə kimi baxa bilərik. Belə nəticəni keyfiyyət və kəmiyyətcə xarakterizə etmək olar.

Təcrübə və ya sınağın nəticəsini keyfiyyətcə xarak­terizə etmək o deməkdir ki, belə bir təcrübə vaxtı konkret fakt qeyd olunur, yəni təcrübənin nəticəsinin müəyyən bir xassəyə malik olub-olmadığı müəyyənləşdirilir. Qeydə alınan bu fakt hadisə adlanır və deyirlər: «hadisə baş verdi», ya da «hadisə baş vermədi».

Təcrübə və ya sınağın nəticəsini kəmiyyətcə xarak­terizə etmək o deməkdir ki, belə bir təcrübə vaxtı hər hansı kəmiyyətin ala biləcəyi qiymətlər müəyyən olunur, belə ki, təcrübəyə qədər həmin qiymətləri təyin etmək mümkün deyildir. Belə kəmiyyətlər təsadüfi adlanır. Məsələn, hər hansı sistemin və ya qurğunun fasiləsiz işləmə vaxtı, təsadüfi seçilən bir adamın boyunun ölçüsü və ya çəkisi və s. təsadüfi kəmiy­yətlərdir.

Deməli, **təsadüfi kəmiyyət** təsadüfi sınağın və ya təc­rü­bə­nin nəticəsində bu və ya digər qiyməti ala biləcək dəyişən kə­miy­yətə deyilir.Təsadüfi kəmiyyətlər latın əlifbasının böyük hərfləri X,Y,Z, . . ilə , onların qiymətləri isə x1,x2, . . . ilə işarə olunur.

Təsadüfi kəmiyyətin ala biləcəyi qiymətlər sonlu, hesabi və qeyri-hesabi ola bilər.

Sonlu və ya hesabi sayda təsadüfi qiymətlər ala bilən kə­miy­yətlərə **diskret təsadüfi kəmiyyətlər** deyilir.

Elə təsadüfi kəmiyyətlər də vardır ki, onları yalnız ala biləcəyi qiymətlər çoxluğu ilə xarakterizə etmək olmur. Belə kəmiyyətlər **kəsilməz, kəsilməz-diskret** və s. təsadüfi kəmiyyətlərdir.

Əgər təsadüfi kəmiyyət hər hansı parçadan bütün qiymətləri alırsa , onda o **kəsilməz təsadüfi** **kəmiyyət** adlanır.

**2. Diskret təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu və funksiyası .**Təsadüfi kəmiyyəti təsadüfi sınağın nəticəsindən asılı funksiya kimi təyin etmək olar.

Tutaq ki, sınağın hər bir  nəticəsinə müəyyən  həqiqi ədədi qarşı qoyulur. Bu halda deyirlər ki, **diskret təsadüfi kəmiyyət** verilir.

Əgər diskret təsadüfi kəmiyyəti  kimi işarə etsək, onda  hadisəsinə müəyyən  ehtimalı uyğun olar, yəni , burada  və (1) – (2) şərtlərini nəzərə alaraq genişlənmiş toplama aksiomuna görə

 **(3)**

yaza bilərik.

Beləliklə, aparılan təsadüfi sınaq zamanı təsadüfi  kə­miy­yətinin hər hansı  qiymətini almasına  hadisəsi kimi baxacağıq və bu hadisənin ehtimalını  ilə işarə etsək, onda diskret adlanan təsadüfi kəmiyyəti , cütləri ilə xarakterizə edə bilərik.

**Tərif.** Əgər  diskret təsadüfi kəmiyyəti  qiymətini uyğun  ehtimalı ilə alırsa, onda həqiqi ədədlərin  cütlər çoxluğuna  kəmiyyətinin **paylanması qanunu** deyilir.

Diskret təsadüfi kəmiyyətin paylanması qanununu  və  ədədləri arasındakı qarşılıqlı uyğunluğu göstərən cədvəl şəklində də vermək olar.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | … |  |  |
|  |  |  | … |  |  |

burada 

Əgər  diskret təsadüfi kəmiyyətinin aldığı  qiymətləri hesabi saydadırsa, yəni onlar natural 1,2,3,…,n,… ədədlərinin artan sırası ilə nömrələnmişsə, onda bu qiymətlərə uyğun  ehtimallarının cəmi olan  sırası yığılır və bu sıranın cəmi vahidə bərabərdir.

Diskret təsadüfi kəmiyyətin paylanması qanununu qrafiki olaraq da vermək olar. Bunun üçün *OX* oxu üzərində  qiymətlərini, *OY* oxu üzərində isə  ehtimallarını qeyd etsək, onda  nöqtələrini düz xətt parçaları ilə birləşdirib nəticədə paylanma çoxbucaqlısını alarıq.

**Misal.**  diskret kəmiyyəti paylanma qanunu

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 4 | 5 | 6 |
|  | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 0,4 |

ilə verilir. Paylanma çoxbu­caq­lısını qurun.

Düz­bucaqlı koordi­nat sistemin­də   və  nöqtələrini qururuq və bu nöqtələri , ,  düz xətt parçaları ilə birləşdiririk. Alınan çoxbucaqlı paylanmanı xarakterizə edir (şəkil 1).

Diskret tə­sa­düfi  kə­miy­yətini onun ehtimallarının pay­lanması funk­siyası ad­la­nan funksiya ilə də xarakterizə et­­mək olar.

*p*

*x*

M4

M3

M2

M1

0,4

0,3

0,2

0,1

0

2

4

5

6

**Şəkil 1**

Tutaq ki,  - qabaqcadan qeyd olun­muş ix­­tiyari həqiqi ədəd­­dir. Onda  təsadüfi kə­miy­yətinin -dən kiçik qiymət alması ehtimalına, yəni  hadisəsinin ehtimalına  kəmiyyətinin **paylanma funksiyası** deyilir və belə işarə olunur:

. **(4)**

Bu tərifdən göründüyü kimi, əgər  diskret təsadüfi kəmiyyətdirsə və -dirsə, onda onun paylanma funksiyası

 **(5)**

olar. Bu isə qrafiki o deməkdir ki, (5) ehtimalı  nöq­tə­sindən keçən və ordinat

oxuna paralel düz xətdən solda yerləşən şaquli parçaların uzunluqları cəminə

bərabərdir, yəni elementar hadisələrin  çoxluğunda təyin olunan ehtimala nəzərən 

kəmiyyəti ölçülə biləndir.  diskret təsadüfi kəmiyyətinin  funksiyasını qrafiki

olaraq göstərmək olar (şəkil 2).

0

х1

х2

х3

х4 … хn

у

x

*y=f(x)*

1

**Şəkil 2**

Beləliklə, elementar ha­di­sələrin disk­ret fəzasını  kimi təyin etməklə və  verməklə, bu­rada , təsadüfi  kə­miyyətini  funk­siyası, yəni  şəklində başa düşmək olar. Çünki  funk­siyası belə təyin olunan təsadüfi  kəmiyyətinin paylanması qanununu da müəyyən edir.

3. **Diskret təsadüfi kəmiyyətin bəzi paylanma qanunları.** Diskret paylanma qanunlarına misal olaraq aşağıdakı qanunları göstərmək olar.

1. ***Binomial paylanma****.* Bernulli sxeminə görə *n* asılı olmayan sınaqlar zamanı təsadüfi hadisənin  dəfə baş verməsini təsadüfi kəmiyyət kimi təyin etsək, onda



1. ***Puasson paylanmasını*** təyin edən ehtimal

,

burada  və



**3)** **Həndəsi paylanma**.Tutaq ki, asılı olmayan sınaqlar aparılır və hər bir sınaqda hadisənin baş verməsi ehtimalı p-dir. A hadisəsi baş verdikdə sınaq başa çatır. Beləliklə əgər hadisə k-cı sınaqdı baş verirsə , onda əvvəlki k-1 sayda sınaqda o baş vermir. X ilə A hadisəsinin baş verməsinə qədər aparılan sınaqların sayını göstərən diskret təsadüfi kəmiyyəti işarə edək. Aydındır ki, X-in mümkün qiymətləri natural ədədlərdir: x1 =1 , x2=2, . . .

Tutaq ki, ilk k-1 sayda sınaqda hadisə baş verməyib, k-cı sınaqda isə baş verir.Ehtimalların vurulması teoreminə görə bu mürəkkəb hadisənin ehtimalı

P(X=k) = qk-1 p

olar. Bu düsturda k=1,2, . . . götürsək ilk həddi p olan və ortaq vuruğu q ( 0˂q˂1 ) olan həndəsi silsilə alırıq:

p, qp, q2 p, . . . ,qk-1p.

Buna görə sonuncu paylanma həndəsi paylanma adlanır.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, sonuncu sıra yığılır və onun cəmi 1-ə bərabərdir. Doğrudan da onun cəmi

p / (1-q) = p/p =1.

**4) *Hiperhəndəsi paylanma****.*  Qutuda *N* kürəcikdən *M* qə­də­ri ağ rəngli, *N – M* qədəri isə qara rənglidir. Qaytarıl­mayan sxem üzrə qutudan ardıcıl olaraq *n* kürəcik çıxarılır. Çıxarılan *n* kürəcik içərisində *m* qədər ağ rəngli kürəciyin olması ehtimalı



ağ rəngli kürəciklərin sayı -nin paylanmasını təyin edir.

**Mühazirə № 7.** Diskret təsadüfi kəmiyyətlərin ədədi xarakteristikaları

**Qısa icmalı:**

Riyazi gözləmə və onun xassələri, riyazi gözləmənin ehtimal mənası. Dispersiya və onun xassələri, orta kvadratik meyl. Moda, median və variasiya əmsalı. Başlanğıc və mərkəzi momentlər.

1. **Diskret təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsinin tərifi**

Təsadüfi kəmiyyətin tam xarakteristikası onun paylanma qanunu vasitəsi ilə verilir. Lakin bəzi hallarda təsadüfi kəmiyyəti tədqiq etmək üçün onun ədədi xarakteristikalarını bilmək kifayət edir. Burada təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikaları dedikdə, təsadüfi kiməyyətin riyazi gözləməsi, dispersiyası və momentləri nəzərdə tutulur. Riyazi gözləmə ilə tanış olaq.

Tutaq ki, diskret  təsadüfi kəmiyyəti sonlu sayda  qiymətlərini uyğun olaraq  ehtimalları ilə alır.

**Tərif.**  ədədinə **sonlu sayda  qiymətlərini alan diskret  təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi** deyilir və

 (1)

kimi işarə olunur.

Xüsusi halda, bu təsadüfi kəmiyyət  qiymətlərinin hamısını eyni  ehtimalı ilə alırsa, onda (1) düsturu aşağıdakı şəklə düşür:

. (2)

(2) bərabərliyi göstərir ki, bu halda təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi onun aldığı qiymətlərin ədədi ortasıdır.

İndi isə tutaq ki, diskret  təsadüfi kəmiyyəti hesabi sayda  qiymətlərini uyğun olaraq  ehtimalları ilə alır.

**Tərif.**   (3)

ədədi sırası mütləq yığılan olduqda, bu sıranın cəminə **hesabi sayda qiymətlər alan diskret  təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi** deyilir. (3) ədədi sırası mütləq yığılan olmadıqda deyirlər ki,  təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi yoxdur.

Tərifə əsasən bu halda

yazmaq olar. Aydındır ki, sonlu sayda qiymətlər alan hər bir təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi vardır.

**Məsələ 1.** Binomial qanunla paylanmış X diskret təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsini tapmalı.

**Həlli.** Tərifə görə

olar. Binomial paylanma üçün

olduğundan, (10) bərabərliyi

kimi yazılır. olduğunu nəzərə alsaq,

və ya

(11)

olar.

**Məsələ 2.** Puasson qanunu ilə paylanmış diskret  təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsini tapın.

**Həlli.** Məlumdur ki, Puasson paylanmasında  təsadüfi kəmiyyəti tam  qiymətlərini



ehtimalı ilə alır. Ona görə (4) düsturuna əsasən yaza bilərik:



Biz burada olmasından istifadə etdik.

**Riyazi gözləmənin xassələri**

İndi isə riyazi gözləmənin xassələrinə keçək. Burada riyazi gözləmənin xassələri yalnız diskret təsadüfi kəmiyyətlər üçün isbat edilirlər. Həmin xassələr kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər üçün də doğrudurlar.

1. **Sabitin riyazi gözləməsi özünə bərabərdir:** **.**

**İsbatı.** Hər bir  sabitinə yalnız bir dənə  qiymətini  ehtimalı ilə alan diskret təsadüfi kəmiyyət kimi baxmaq olar. Ona görə (1) düsturuna görə **** olduğu alınır.

1. **Sabiti riyazi gözləmə işarəsi xaricinə çıxarmaq olar:** **.**

**İsbatı.** Aydındır ki, diskret  təsadüfi kəmiyyəti  qiymətini  ehtimalı ilə aldıqda  təsadüfi kəmiyyəti də  qiymətini həmin  ehtimalı ilə alacaqdır, yəni . Riyazi gözləmənin (3) ilə təyin olunan düsturuna görə

.

**3. İki təsadüfi kəmiyyətin cəminin riyazi gözləməsi onların riyazi gözləmələrinin cəminə bərabərdir:**

**.**

**İsbatı.** Tutaq ki,  təsadüfi kəmiyyəti  qiymətini  ehtimalı ilə (),  təsadüfi kəmiyyəti  qiymətini  ehtimalı ilə (), təsadüfi kəmiyyəti  qiymətini  ehtimalı ilə () alır:



Onda yaza bilərik:



Alınan sonuncu iki münasibəti nəzərə alaraq  təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsini (4) düsturu ilə hesablayaq:



Riyazi gözləmənin ikinci və üçüncü xassələrini birləşdirib aşağıdakı bir xassə şəklində ümumiləşdirmək olar.

**Riyazi gözləmənin xəttilik xassəsi. ** istənilən təsadüfi kəmiyyətlər, **** isə ixtiyari sabitlər olduqda



bərabərliyi doğrudur.

**4. Asılı olmayan iki təsadüfi kəmiyyətin hasilinin riyazi gözləməsi, onların riyazi gözləmələri hasilinə bərabərdir: **

**İsbatı.** Əvvəlcə qeyd edək ki, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin tərifi asılı olmayan hadisələrin tərifinə oxşar şəkildə verilir.  təsadüfi kəmiyyətləri üçün olarsa, onda  və -ə **asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər** deyilir. Burada - istənilən həqiqi ədədlərdir.

Indi isə xassənin isbatına keçək.  işarə etsək,  asılı olmayan təsadüfi hadisələr olduqları üçün

.

Bu bərabərliyi nəzərə alaraq (4) düsturundan istifadə edək:



Bu xassə istənilən sonlu sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün də doğrudur:

.

**5. İstənilən  təsadüfi kəmiyyəti üçün  bərabərsizliyi doğrudur.**

**İsbatı.** Riyazi gözləmənin (4) düsturundan, cəmin modulunun xassəsindən və ehtimalın mənfi olmamasından alırıq:



Sonda qeyd edək ki, riyazi gözləməsi sonlu ədəd olan təsadüfi kəmiyyətin bütün qiymətləri onun riyazi gözləməsinin ətrafında yerləşir.

***Xassə 6****.* M[X- M(X)] = 0; Burada X – M(X) fərqinə **təsadüfi kəmiyyətin meyli** deyilir.

**İsbatı**. M[X – M(X)] = M(X) – M(M(X)) = M(X) – M(X) = 0.

**Təsadüfi kəmiyyətdən asılı funksiyanın riyazi gözləməsi.** Tutaq ki,  - ixtiyari funksiyadır,  -təsadüfi kə­miy­yətlərdir,  çoxluqları isə  və  kəmiy­yət­lə­rinin uyğun qiymətlər çoxluqlarıdır. Tutaq ki,  funksiyası  çoxluğunu  çoxluğuna inikas etdirir. Onda

. **(4)**

(4)-də sağ tərəfdəki sıra mütləq yığılan olmalıdır.

Əgər  təsadüfi kəmiyyətinin ehtimal sıxlıq funksiyası  məlumdursa, onda  funksiyasının riyazi gözləməsi

 **(5)**

ədədinə deyilir. Sağ tərəfdəki inteqral mütləq yığılan olmalı­dır.

## 4. Riyazi gözləmənin ehtimal mənası. Tutaq ki, n sayda sınaq aparılır və bu sınaqlarda X təsadüfi kəmiyyəti x1 qiymətini m1 dəfə, x2 qiymətini m2 dəfə və s. xk qiymətini mk dəfə alır. Belə ki, m1 + m2+ . . . +mk = m. Onda X –in aldığı bütün qiymıtlərin cəmi belə olar

x1m1 + x2m2 + . . . + xkmk

Təsadüfi kəmiyyətin aldığı bütün qiymətlərin ədədi ortasını tapaq. Bunun üçün sonuncu cəmi sınaqların ümumi sayına bölək:

X̅ = ( x1m1+x2m2 + . . . + xkmk ) ̸ n

və ya

X̅ = x1 (m1/n)+x2 (m2/n) + . . . + xk(mk/n ) (6)

Aydındır ki,

m1 ̸ n1 = w1, m2 ̸ n2=w2, . . . , mk / n =wk

Onda (6) –nı belə yazmaq olar:

X̅ = x1w1 +x2 w2 + . . . + xk wk (7)

Fərz edək ki, sınaqların sayı kifayət qədər böyükdür. Onda

w1 ≈ p1, w2 ≈ p2, . . . , wk ≈ pk

(7) –də nisbi tezlikləri uyğun ehtimallarla əvəz etsək alarıq:

X̅ = x1p1 +x2 p2 + . . . + xk pk

Sonuncu bərabərliyin sağ tərəfi M(x) olduğundan X̅ ≈ M(X) alarıq.

Alınan nəticənin **ehtimal mənası** belədir: Riyazi gözləmə təqribi olaraq təsadüfi kəmiyyətin müşahidə olunan qiymətlərinin ədədi ortasına bərabərdir.

**Teorem**. Asılı olmayan n sayda sınaqlarda hadisənin baş verməsi sayının riyazi ğözləməsi

M(X) = np

olar, burada p –hər sınaqda hadisənin baş vermə ehtimalıdır.

**İsbatı.** X təsadüfi kəmiyyəti olaraq A hadisəsinin n sayda asılı olmayan sınaqda baş verməsi sayını ğötürək. Əgər X1 -birinci sınaqda, X2 – ikinci sınaqda, . . . , Xn – n-ci sınaqda hadisənin baş vermə sayı olarsa , onda hadisənin ümumi baş vermə sayı

X = X1 + X2 +. . . +Xn

olar. Riyazi ğözləmənin tərifinə əsasən

M(X) = M(X1) + M(X2) +. . . +M(Xn)

Bir sınaqda hadisənin baş vermə sayının riyazi gözləməsi p-yə bərabər olduğundan

M(X1) = M(X2) = . . . = M(Xn) = p.

Onda M(X) = np olar. Deməli, binomial paylanmanın riyazi gözləməsi M(X) = np –dir.

**ƏDƏBİYYAT**

1. M.M.Səbzəliyev “Ali riyaziyyatdan mühazirələr” II hissə, Bakı-2014,

XI fəsil **§**14.

1. M.M.Səbzəliyev “Ali riyaziyyatdan məsələlər” II hissə, Bakı-2016,

XII fəsil §7.

**Dispersiyanın ümumi tərifi. Diskret təsadüfi kəmiyyətlərin dispersiyalarının hesablanma düsturları**

Bəzi nəzəri və praktiki məsələlər həllində sonlu riyazi gözləməsi olan təsadüfi kəmiyyətlərin qiymətlərinin onun riyazi gözləməsi ətrafında necə paylanmasını, səpələnməsini bilmək lazım gəlir. Təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikalarından biri olan dispersiya təsadüfi kəmiyyəti bu mənada xarakterizə edir.

**Tərif.** təsadüfi kəmiyyətinin  riyazi gözləməsi sonlu ədəd olduqda təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsinə **-in dispersiyası** deyilir və  kimi işarə olunur.

Bu tərifə əsasən

 . (1)

 diskret təsadüfi kəmiyyət olduqda  qiymətini hansı ehtimalla alırsa,  təsadüfi kəmiyyəti də  qiymətini həmin ehtimalla alır. Ona görə də (1)-ə əsasən diskret  təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası üçün aşağıdakı düstur alınır:

 (2)

(2) düsturlarından alınır ki, istənilən  təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası varsa, mənfi olmayan ədəddir. 

Riyazi gözləmənin xassələrindən istifadə edərək (1) bərabərliyinin sağ tərəfini aşağıdakı kimi çevirmək olar:



. (4)

 olduğu üçün (4)-dən alınır ki,



bərabərsizliyi doğrudur.

Bəzən təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərinin səpələnmə xarakteristikası olaraq dispersiya əvəzinə orta kvadratik meyldən istifadə edirlər.

**Tərif.** düsturu ilə təyin olunan **** ədədinə ** təsadüfi kə-miyyətinin orta kvadratik meyli** deyilir.

1. **Bəzi təsadüfi kəmiyyətlərin dispersiyalarının hesablanma düsturları**

**Məsələ 3.** Puasson qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyasını tapın.

**Həlli.** Məlumdur ki, Puasson qanunu ilə paylanmış  təsadüfi kəmiyyəti tam  qiymətlərini  ehtimalı ilə alır. Məlumdur ki, . -i tapmaq üçün (4) düsturundan istifadə edəcəyik.  məlumdur, (4) düsturu ilə -i hesablamaq üçün əvvəlcə -nı aşağıdakı kimi tapaq:



(4) düsturundan istifadə edərək , alırıq:



Beləliklə, parametrli Puasson qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası -ya bərabərdir.

1. **Dispersiyanın xassələri**

**1. Sabitin dispersiyası sıfıra bərabərdir: .**

**İsbatı.** (1) düsturuna və  olduğuna görə yaza bilərik:



**2. Sabitin kvadratını dispersiya işarəsi xaricinə çıxarmaq olar: ** .

**İsbatı.** (1) düsturuna və  olduğuna görə alırıq:



**3. Asılı olmayan  və  təsadüfi kəmiyyətlərinin cəminin dispersiyası onların dispersiyaları cəminə bərabərdir: .**

**İsbatı.** (1)-dən və riyazi gözləmənin xassələrindən istifadə edərək, alırıq:

Qeyd edək ki, bu xassə ikidən çox ixtiyari sonlu asılı olmayan təsadüfi kəmiy-yətlər üçün də doğrudur:

.

1. **Asılı olmayan**  **və**  **təsadüfi kəmiyyətləri üçün**  **bərabərliyi doğrudur.**

**İsbatı.** 2-ci və 3-cü xassələrdən istifadə etməklə alırıq:



**5. Asılı olmayan  və  təsadüfi kəmiyyətləri üçün bərabərliyi doğrudur.**

**İsbatı.** Riyazi gözləmənin məlum xassələrindən istifadə edərək, alırıq:

**Məsələ.** Asılı olmayan  sınaq aparılır və hər sınaqda  hadisəsinin baş vermə ehtimalı  ədədidir. Bu  sayda sınaqlarda  hadisəsinin baş verdiyi hal-ların sayını göstərən  təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyasını tapın.

**Həlli.**  -cı sınaqda  hadisəsinin baş vermə sayını göstərən təsadüfi kə-miyyəti  ilə işarə edək. -cı sınaqda  hadisəsi baş verdikdə bu təsa-düfi kəmiyyətin 1, baş vermədikdə isə sıfır qiymət aldığı nəzərdə tutulur. Onda mə-sələnin şərtindəki  təsadüfi kəmiyyəti asılı olmayan  təsadüfi kəmiy-yətlərinin cəminə bərabər olar: . Buradan dispersiyanın məlum xassəsinə görə

 ()

olar. -nı ;  düsturu ilə tapacağıq.

Hər bir  təsadüfi kəmiyyəti 1 qiymətini  ehtimalı ilə, sıfır qiymətini  ehtimalı ilə alan diskret təsadüfi kəmiyyət olduğu üçün

****

olar.  təsadüfi kəmiyyəti də 1 qiymətini , sıfır qiymətini  ehtimalı ilə aldığı üçün ****  olur. Onda



olar. ()-da ;  olduğunu nəzərə aldıqda



alınır.

Beləliklə,  və  parametrli binomial qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası  ədədinə bərabərdir.

**4.Təsadüfi kəmiyyətlərin momentləri**

Təsadüfi kəmiyyətlərin ən mühüm ədədi xarakteristikalarından biri də onun momentləridir. Tutaq ki,  təsadüfi kəmiyyətdir.

**Tərif.**  təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsinə  **təsadüfi kəmiyyətinin  tərtibli başlanğıc momenti** (və ya ** tərtibli momenti**) deyilir və  kimi işarə olunur.

Bu tərifə əsasən yaza bilərik:

. (1)

**Tərif.**  təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsinə **təsadüfi kəmiyyətinin  tərtibli mərkəzi momenti** deyilir və  ilə işarə olunur.

Tərifə əsasən

 (2)

yazmaq olar.

 olduqda (1) aşağıdakı şəklə düşür

. (3)

(3) onu göstərir ki, təsadüfi kəmiyyətin bir tərtibli başlanğıc momenti onun riyazi gözləməsi ilə üst-üstə düşür.

 olduqda (2) aşağıdakı şəklə düşür:

. (4)

(4) onu bildirir ki, təsadüfi kəmiyyətin 2 tərtibli mərkəzi momenti onun dispersiyası ilə üst-üstə düşür: . (2)-dən həm də aşağıdakı münasibətlərin doğruluğu alınır:



Təsadüfi kəmiyyətin müxtəlif tərtibli başlanğıc və mərkəzi momentləri arasında sadə asılılıqlar vardır. Məsələn, (1) və (2)-yə əsasən yaza bilərik:



Təsadüfi kəmiyyətin başlanğıc və mərkəzi momentlərindən əlavə mütləq başlanğıc və mütləq mərkəzi momentlərinə də baxırlar.

 düsturu ilə təyin olunan kəmiyyətə -in ** tərtibli mütləq başlınğıc momenti,**  düsturu ilə təyin olunan kəmiyyətə isə-in ** tərtibli mütləq mərkəzi momenti** deyilir.

Aydındır ki, cüt tərtibli mütləq momentlər adi momentlər ilə üst-üstə düşürlər.

**Qeyd 2**. Variasiya əmsalı kvadratik orta yayınmanın riyazi gözləməyə faiz nisbətinə deyilir

V = 100٪

**5. Paylanmanın modası və medianı**

Tutaq ki,  təsadüfi kəmiyyəti diskretdir və onun pay­lanması verilir:

.

**Tərif 5**. təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının **modası** onun ən ehtimallı  qiymətinə, yəni ehtimalı ən böyük olan qiymətinə deyilir, belə işarə olunur:. **Misal.**  diskret kəmiyyətinin paylanması cədvəllə verilir:



Buradan göründüyü kimi, bu kəmiyyətin paylanmasının modası -dür.

**Tərif 6. *Median (Me)*** *–* təsadüfi kəmiyyətin nizamlanmış sırasının tən ortasına düşən varianta deyilir. Variantların sayı tək olduqda mediani tapmaq üçün variantların sayının üstünə 1 gəlib, 2-yə bölmək lazımdır. Yəni n = 2k+1 olduqda Me = xk+1; Məsələn, 2 3 5 6 7 sırası üçün Me = 5 olur.

Variantların sayı cüt olduqda isə variasiya sırası 2 bərabər hissəyə bölünür və median aşağıdakı düsturla hesablanır:

Me= (xk + xk+1) /2

*Məsələn, 2, 3, 5, 6, 7, 9 sırası üçün*  isə

Me = (5 +6) /2 = 5,5 olur.

***Misal* .** Binomial paylanan  diskret kəmiyyətinin dis­persiyasını və orta kvadratik meylini tapmalı.

***Həlli****.* Isbatı. Tutaq ki, X təsadüfi kəmiyyəti A hadisəsinin n sayda asılı olmayan sınaqlarda baş vermə sayıdır.Aydındır ki, bu sınaqlarda hadisənin ümumi baş vermə sayı

X = X1 + X2 + …+ Xn

olar. X1,X2, …,Xn təsadüfi kəmiyyətləri asılı olmadığından

D(X) = D(X1) + D(X2) +…+ D(Xn)

və

olduğundan

D(X1) = p – p2 = p(1 – p) = pq , çünki =12.p + 02.q = p

Beləliklə,qalan hər bir təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası da qp - yə bərabər olduğundan  və  alarıq.

**ƏDƏBİYYAT**

1. M.M.Səbzəliyev “Ali riyaziyyatdan mühazirələr” II hissə, Bakı-2014,

XI fəsil **§**7-**§**9.

1. M.M.Səbzəliyev “Ali riyaziyyatdan məsələlər” II hissə, Bakı-2016,

XII fəsil §3, § 4.

**Mövzu № 9.** Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma və sıxlıq funksiyaları, onların xassələri. Bəzi kəsilməz paylanmalar

**Qısa icmalı:**

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin tərifi, paylanma və sıxlıq funksiyaları, onların xassələri. Kəsilməz paylanmalara nümunələr (müntəzəm, üstlü, normal, loqarifmik normal paylanmalar).

**Təsadüfi kəmiyyətin tərifi**

**Tərif.** Təsadüfi kəmiyyətin aldığı qiymətlər hər hansı sonlu və ya sonsuz aralıqdırsa, onda ona **kəsilməz təsadüfi kəmiyyət** deyilir.

Məsələn,  parçasından təsadüfi olaraq götürülmüş iki nöqtə arasındakı məsafəni  ilə işarə edək.  təsadüfi kəmiyyətdir və bu təsadüfi kəmiyyət 0 ilə 2 arasındakı istənilən qiymətləri ala bilər. Ona görə də  kəsilməz təsadüfi kəmiyyətdir.

İndi isə təsadüfi kəmiyyətin ciddi riyazi tərifini verək. Əvvəlcədən qeyd edək ki, təsadüfi kəmiyyət müəyyən elementar hadisələr fəzasında təyin olunmuş funksiyadır. Başqa sözlə. təsadüfi kəmiyyət elementar hadisələr fəzasından olan hər bir elementar hadisəyə müəyyən bir ədədi qarşı qoyan uyğunluqdur.

Tutaq ki,  ehtimal fəzası verilmişdir. Burada - elementar hadisələr fəzası, - onun - cəbri,  -isə ehtimal funksiyasıdır. Fərz edək ki,  elementar hadisələr fəzasında təyin olunmuş, həqiqi qiymətli  funksiyası verilmişdir. - istənilən həqiqi ədəd olsun.  şərtini ödəyən elementar hadisələr çoxluğunu  və ya qısa şəkildə  kimi işarə edək. Məsələn, sınaq bir nərd zərinin hamar lövhə üzərinə atılması, ={zərin yuxarı üzündə  xalı düşür} hadisəsi olduqda elementar hadisələr fəzası  olar. -da təyin olunmuş  funksiyasına baxaq və  götürək. Onda  olar.

**Tərif.**  elementar hadisələr fəzasında təyin olunmuş və istənilən həqiqi  ədədi üçün  şərtini ödəyən həqiqi qiymətli  funksiyasına **təsadüfi kəmiyyət** deyilir.

**2. Təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası və onun xassələri**

Məlumdur ki,  ehtimal funksiyası - cəbrində təyin olunmuşdur.  təsadüfi kəmiyyət olduqda  olduğu üçün -in də ehtimalı təyin olunmuşdur.

**Tərif.**  təsadüfi kəmiyyətinin -dən kiçik qiymətlər alması hadisəsinin ehtimalına bu **təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası** deyilir və

 (1)

kimi işarə olunur.

Göstərmək olar ki, - cəbrindən olan hər bir hadisənin əksi olan hadisə də -ə daxildir. Doğrudan da, -ə daxil olan hər hansı bir  hadisəsi götürək.  və ,  olmasından və - cəbrinin tərifindən çıxır ki, . Deməli,  hadisəsi ilə birlikdə onun əksi olan  hadisəsi də -ə daxildir. Ehtimalın məlum xassəsinə görə



olduğu alınır.











Ədəd oxu üzərində  şərtini ödəyən istənilən iki  nöqtələri götürək. Aydındır ki,  və  hadisələri uyuşmayandırlar və

 (2)

bərabərliyi doğrudur. Ehtimalın additivlik aksiomuna görə (2)-dən alırıq:

 (3)

(1)-ə əsasən (3)-ü aşağıdakı kimi yazmaq olar:

 (4)

(4) bərabərliyi onu ifadə edir ki,  təsadüfi kəmiyyətinin  yarımintervalından qiymətlər alma ehtimalı bu təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyasının həmin yarımintervalın sağ ucundakı qiyməti ilə sol ucundakı qiymətlərinin fərqinə bərabərdir.

İndi isə paylanma funksiyasının bəzi xassələrini qeyd edək.Tutaq ki,  hər hansı bir  təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasıdır. (4) düsturunda  yazaq. Onda aşağıdakı düstur alınır:

.

şərtində sonuncu bərabərliyin hər iki tərəfində limitə keçək:

. (5)

Aydındır ki,  kəsilməyən funksiya olduqda  olur və (5) bərabərliyi aşağıdakı şəklə düşür:

. (6)

(6) onu göstərir ki,  təsadüfi kəmiyyətinin  paylanma funksiyası kəsilməyən olduqda bu təsadüfi kəmiyyətin konkret bir  qiymətini alması hadisəsinin ehtimalı sıfra bərabərdir. Bu təklifi “mümkün olmayan hadisənın ehtimalı sıfra bərabərdir” təklifindən fərqləndirmək lazımdır. Paylanma funksiyası kəsilməyən  təsadüfi kəmiyyətinin konkret bir  qiymətini alması mümkündür, lakin həmin qiyməti alması ehtimalı sıfra bərabərdir.

**Mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər**

Tutaq ki, bütün həqiqi oxda təyin olunmuş  funksiaysı aşağıdakı iki şərti ödəyir:

**1) **

**2).**

Göstərmək olar ki,  funksiyası 1),2) şərtlərini ödəyirsə, onda

 (7)

düsturu ilə təyin olunan  funksiyası I-III xassələrinə malikdir. Doğrudan da, olmasından çıxır ki.  şərtini ödəyən istənilən  həqiqi ədədləri üçün . Buradan və (7)-dən alırıq:





Sonuncu münasibət onu göstərir ki,  azalmayandır, yəni I şərti ödənilir.

II şərtinin ödənildiyini göstərək. (7)-yə əsasən

.

 funksiyası 2) şərtini ödədiyindən (7)-yə əsasən



olur. Yəni  üçün II şərti də ödənilir.

Nəhayət III şərtinin ödənildiyini göstərək. (7)-yə əsasən istənilən  nöqtəsi üçün



olduğu üçün III şərti də ödənilir.

Yuxarıdakı teoremə əsasən  funksiyası 1), 2) şərtlərini ödəyən funksiya olduqda (7) düsturu ilə təyin olunan  funksiyası paylanma funksiyasıdır.

1), 2) şərtlərinə malik olan  funksiyasına **sıxlıq funksiyası**, paylanma funksiyası (7) düsturu şəklində göstərilən təsadüfi kəmiyyətə isə **mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyət** deyilir.

Sıxlıq funksiyası  olan mütləq kəsilməz  təsadüfi kəmiyyəti üçün

 (8)

bərabərliyi doğrudur. Doğrudan da, (7)-yə əsasən yaza bilərik:

.

 və -nin bu ifadələrini (4) bərabərliyinin sağ tərəfində yerlərinə yazıb, alınan bərabərliyin sağ tərəfini müəyyən inteqralın məlum xassəsinə görə çevirsək alarıq:



**Təsadüfi kəmiyyət və onun paylanma funksiyasına aid məsələlər həlli**

**Məsələ . ** funksiyası



düsturu ilə təyin olunur.

a)  parametrini elə təyin edin ki,  funksiyası sıxlıq funksiyası olsun;

b) sıxlıq funksiyası  olan mütləq kəsilməz **** təsadüfi kəmiyyətinin  intervalından qiymətlər alması hadisəsinin ehtimalını tapın.

**Həlli. Ə**vvəlcə  parametrini elə təyin edək ki,  funksiyası sıxlıq funksiyası olsun. Bunun üçün  elə seçilməlidir ki,  və  olsun. Əvvəlcə  inteqralını hesablayaq:



Buradan və şərtindən  olduğunu alırıq. Qeyd edək ki,  olduqda  funksiyası həm də  şərtini ödəyir.

Beləliklə  sıxlıq funksiyası



düsturu ilə təyin edilir.

İndi isə sıxlıq funksiyası bu  funksiyası olan  təsadüfi kəmiyyətinin  intervalından qiymətlər alması hadisəsinin ehtimalını tapaq. Bunun üçün (8) düsturundan istifadə edəcəyik:



Beləliklə,

.

**ƏDƏBİYYAT**

1. M.M.Səbzəliyev “Ali riyaziyyatdan mühazirələr” II hissə, Bakı-2014,

XI fəsil **§**12.

1. M.M.Səbzəliyev “Ali riyaziyyatdan məsələlər” II hissə, Bakı-2016,

XII fəsil §6.

**3. Kəsilməz paylanmalar. Mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlərin bəzi xassələri**

Məlumdur ki, elə kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər vardır ki, onların paylanma funksiyası

 (7)

düsturu ilə təyin edilirlər. Burada  sıxlıq funksiyasıdır. Belə təsadüfi kə-miyyətləri mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər adlandırmışıq.

Qeyd edək ki, hər bir kəsilməz təsadüfi kəmiyyət mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyət deyildir. Biz burada yalnız mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlərə baxa-cağıq.

Mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlərə aid misallara keçməmişdən əvvəl onların bəzi ümumi xassələrini göstərək.

**1)  sıxlıq funksiyası kəsilməyən funksiya olduqda**

**** (8)

**bərabərliyi doğrudur.**

(8) bərabərliyinin doğruluğu birbaşa (7)-dən və yuxarı sərhəddi dəyişən inteqralın diferensiallanmasına aid teoremdən alınır.

**2) Mütləq kəsilməz  təsadüfi kəmiyyətinin konkret bir  ədədi qiymət olması hadisəsinin ehtimalı sıfra bərabərdir:**

**.** (9)

**İsbatı.** Əvvəlcə yada salaq ki, paylanma funksiyası kəsilməyən funksiya olan təsadüfi kəmiyyətlər üçün (9)-un doğruluğu məlumdur.

Sıxlıq funksiyası  olan mütləq kəsilməz  təsadüfi kəmiyyəti üçün

 (10)

bərabərliyi doğrudur. (10) düsturundan istifadə edərək



olduğunu alırıq.

3) **İstənilən mütləq kəsilməz  təsadüfi kəmiyyəti üçün**

 (11)

**münasibəti doğrudur.**

**İsbatı.** Aydındır ki,

 bərabərliyi doğrudur və   hadisələri uyuşmayandırlar. Onda ehtimalın additivlik xassəsinə və 2) xassəsinə əsasən yaza bilərik.



Oxşar qayda ilə (11) –dəki qalan bərabərliklərin doğruluqları göstərilir.

**4.Kəsilməz paylanmaların bəzi növləri (normal paylanma, üstlü paylanma, müntəzəm paylanma)**

İndi isə ehtimal nəzəriyyəsində daha çox rast gələn bəzi mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyətləri göstərək.

1. **Normal paylanma.** Sıxlıq funksiyası



düsturu ilə təyin mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyətə normal **qanunla və ya Qauss qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyət** deyilir. Burada  bütün həqiqi oxda dəyişir,  və  ədədlərinə isə **normal paylanmanın parametrləri** deyilir.

1. **Üstlü paylanma**. Sıxlıq funksiyası



düsturu ilə təyin olunan mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyətə **üstlü qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyət** deyilir.

(7) düsturundan istifadə etməklə asanlıqla göstərmək olar ki, üstlü qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası



şəklindədir.

**3. Müntənzəm paylanma .**Sıxlıq funksiyası



olan mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyətə **müntəzəm paylanmış təsadüfi kəmiyyət** deyilir 

(7) düsturundan alınır ki, müntənzəm paylanmış təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası



şəklindədir.

**ƏDƏBİYYAT**

1. M.M.Səbzəliyev “Ali riyaziyyatdan mühazirələr” II hissə, Bakı-2014,

XI fəsil **§**13.

1. M.M.Səbzəliyev “Ali riyaziyyatdan məsələlər” II hissə, Bakı-2016,

XII fəsil §6.

**Mühazirə № 10.**

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlərin ədədi xarakteristikaları

**Qısa icmalı:**

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlərin riyazi gözləmə və dispersiya, onların xassələri. Başlanğıc və mərkəzi momentlər, onlar arasında əlaqə düsturu.

**Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsinin tərifi**

Sıxlıq funksiyası  olan mütləq kəsilməz  təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsinə belə tərif verilir.

**Tərif. ** (5)

qeyri-məxsusi inteqralı mütləq yığılan olduqda bu inteqralın qiymətinə **mütləq kəsilməz  təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi** deyilir. (5) qeyri-məxsusi inteqralı mütləq yığılan olmadıqda deyirlər ki,  təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi yoxdur.

Bu tərifə əsasən (5) qeyri-məxsusi inteqralı mütləq yığılan olduqda mütləq kəsilməz  təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi

düsturu ilə təyin edilir.

Riyazi gözləməyə verilən təriflərdən alınır ki, riyazi gözləmə ədəddir.

Məlumdur ki, sıxlıq funksiyası  olan mütləq kəsilməz  təsadüfi kəmiyyətinin  paylanma funksiyası aşağıdakı düstur ilə təyin edilir.

. (7)

Əgər  sıxlıq funksiyası kəsilməyən funksiya olarsa, onda (7)-dən

 (8)

alınır. (8)-i (7)-nin sağ tərəfində nəzərə alıb, paylanma funksiyası məlum olan mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsini tapmaq üçün yeni

düsturunu yazmaq olar.

**Bəzi təsadüfi kəmiyyətlərin riyazi gözləmələrinin hesablanması (normal paylanma, üstlü paylanma, müntəzəm paylanma)**

**Məsələ .** Normal qanunla paylanmış təsadüfi X kəmiyyətinin riyazi gözləməsini tapmalı.

**Həlli.** Bu halda sıxlıqfunksiyası

olduğundan X kəmiyyətinin riyazi gözləməsi (6) düsturu ilə hesablanır:



Burada əvəzləməsini apardıqda

və ya

(12)

alınır. Hesablama prosesində  
bərabərliyindən istifadə edilmişdir. Buradan aydındır ki, normal paylanma-nınparametri təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsinə bərabərdir.

**Məsələ . ** parçasında müntəzəm paylanmış mütləq kəsilməz  təsadüfi kə-miyyətinin riyazi gözləməsini tapın.

**Həlli.** Məlumdur ki, müntəzəm paylanmış təsaüfi kəmiyyətiin sıxlıq funksiyası



düsturu ilə təyin edilir. (6)-ya əsasən alırıq:



**Məsələ 5.** Paylanma funksiyası

olan təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi yoxdur.

Doğrudan da, (9) düsturuna görə



olar.

**ƏDƏBİYYAT**

1. M.M.Səbzəliyev “Ali riyaziyyatdan mühazirələr” II hissə, Bakı-2014,

XI fəsil **§**14.

1. M.M.Səbzəliyev “Ali riyaziyyatdan məsələlər” II hissə, Bakı-2016,

XII fəsil §7.

Sıxlıq funksiyası  olan mütləq kəsilməz  təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası üçün

 (3)

düsturu doğrudur.

1. **Bəzi təsadüfi kəmiyyətlərin dispersiyalarının hesablanma düsturları (Normal paylanma, müntəzəm paylanma,Puasson paylanması)**

**Məsələ 1.**Normal qanunla paylanmış X təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyasını hesab-lamalı.

**Həlli.** Normal qanunla paylanmanın sıxlıq funksiyası

olduğundan, kəsilməz X kəmiyyətinin dispersiyası (3) düsturu ilə hesablanır:

Burada olmasını nəzərə aldıqda və əvəzləməsindən istifadə etdikdə

və ya

(5)

alınır.

**Məsələ 2.** Müntəzəm paylanmış X təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyasını tapmalı.

**Həlli.**  parçasındamüntəzəm paylanmış X təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyasınn riyazi gözləməsinin isə olduğu məlumdur. Onda (3) düsturuna görə

olar.

Təsadüfi kəmiyyətlərin ən mühüm ədədi xarakteristikalarından biri də onun momentləridir. Tutaq ki,  təsadüfi kəmiyyətdir.

**Tərif.**  təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsinə  **təsadüfi kəmiyyətinin  tərtibli başlanğıc momenti** (və ya ** tərtibli momenti**) deyilir və  kimi işarə olunur.

Bu tərifə əsasən yaza bilərik:

. (1)

**Tərif.**  təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsinə **təsadüfi kəmiyyətinin  tərtibli mərkəzi momenti** deyilir və  ilə işarə olunur.

Tərifə əsasən

 (2)

yazmaq olar.

 olduqda (1) aşağıdakı şəklə düşür

. (3)

(3) onu göstərir ki, təsadüfi kəmiyyətin bir tərtibli başlanğıc momenti onun riyazi gözləməsi ilə üst-üstə düşür.

 olduqda (2) aşağıdakı şəklə düşür:

. (4)

(4) onu bildirir ki, təsadüfi kəmiyyətin 2 tərtibli mərkəzi momenti onun dispersiyası ilə üst-üstə düşür: . (2)-dən həm də aşağıdakı münasibətlərin doğruluğu alınır:



Təsadüfi kəmiyyətin müxtəlif tərtibli başlanğıc və mərkəzi momentləri arasında sadə asılılıqlar vardır. Məsələn, (1) və (2)-yə əsasən yaza bilərik:



Təsadüfi kəmiyyətin başlanğıc və mərkəzi momentlərindən əlavə mütləq başlanğıc və mütləq mərkəzi momentlərinə də baxırlar.

 düsturu ilə təyin olunan kəmiyyətə -in ** tərtibli mütləq başlınğıc momenti,**  düsturu ilə təyin olunan kəmiyyətə isə-in ** tərtibli mütləq mərkəzi momenti** deyilir.

Aydındır ki, cüt tərtibli mütləq momentlər adi momentlər ilə üst-üstə düşürlər.

**Mühazirə № 12.**

Riyazi statistikanın predmeti, əsas məsələləri və anlayışları. Poliqon və histoqram. Empirik paylanma funksiyası və onun xassələri

**Qısa icmalı:**

Riyazi statistikanın predmeti, əsas məsələləri və məzmunu. Statistik modellər. Ümumi və seçmə çoxluq anlayışları. Seçmənin statistik paylanması. Tezlik və nisbi tezlik anlayışı. Paylanma və variasiya sırası. Təsadüfi seçim üsulları. Empirik paylanma funksiyasının tərifi, onun qrafiki və xassələri. Qlivenko-Kantelli teoremi. Riyazi statistikada sıxlıq funksiyasının qiymətləndirilməsi. Tezliklər və nisbi tezliklər poliqonunun qurulması. Tezliklər və nisbi tezliklər histoqramının qurulması.

1. **Riyazi statistikanın əsas məsələləri**

Statistika sözü latın sözü olub, «status» sözündən götürülmüşdür və hadisənin vəziyyəti deməkdir. Statistika kütləvi hadisələrin kəmiyyət tərəfini öyrənən bir elmdir. Bu zaman kəmiyyət tərəfinin keyfiyyət tərəfindən ayrılmadan öyrənildiyi nəzərdə tutulur. Kütləvi hadisələr bir qayda olaraq ayrı-ayrı vahidlərdən, elementlərdən ibarət olur. Bu ayrı-ayrı vahidlərin hamısına birlikdə statistika məcmuyu deyilir. Məsələn, əhalinin siyahıya alınmasında ayrı-ayrı şəxslər barəsində məlumat toplanılır və bu məlumatlar əsasında rayonun, vilayətin, ölkənin əhalisinin ümumi sayı və başqa lazimi məlumatlar müəyyən edilir.

Hər bir elmin son nəticədə əsas məsələsi real proseslərin tabe olduqları qanunauyğunluqların tədqiq və aşkar edilməsindən ibarətdir. Hər bir belə qanuna­uy­ğunluğu aşkar etmək üçün kifayət qədər sınaqlar (müşahidələr, ölçmələr, təcrübələrin qoyulması və s.) aparılır və araşdırılan prosesin hər hansı xarak­teristikası müşahidə olunur və ya ölçülür.

Sınaqların nəticələri **eksperimental verilənlər** adlanır. Təsadüfi kəmiyyət üzərində aparılmış müşahidələrin nəticələri isə **statistik verilənlər** adlanır. Alınmış nəticələr sistemləşdirilir, müəyyən əlamətlərə görə qruplaşdırılır, analiz edilir və nəticədə öyrənilən hadisələr üçün səciyyəvi olan qanunauyğunluqlar aşkar edilir.

Sınaqların nəticələri və həm də başqa yolla əldə olunmuş statistik verilənlərin analizi metodları **riyazi statistikanın predmetini** təşkil edir.

Riyazi statistika təsadüfi proseslərin qanunauyğunluqlarını öyrə­nən ehtimal nəzəriyyəsinə əsaslanır. Riyazi statistikanın metodları statistik və eksperimental verilənlərin təsadüfi kəmiyyətin realizasiyası, müşahidə və yaxud təsadüfi sınaq­ların aparıl­ması nəticəsində əldə edildiyini fərz edir. Bu isə riyazi statistikanın ehtimal nəzə­riyyəsi ilə əlaqəsini şərtləndirir.

Beləliklə, riyazi statistikanın əsas məsələsi kütləvi hadisələr və proseslər üzərində aparılmış müşahidə və sınaqların nəticə­lərinə əsasən onların qanunauyğunluqlarını öyrənməkdən, yəni statistik qə­rar­lar qəbul etməkdən ibarətdir. Statistik qərarlar ayrı-ayrı sınaqlara aid olmayıb, hadisənin ümumi xarakteristikaları haqqında təkliflərdir.

Statistika və riyaziyyat məzmunlarına görə müxtəlif elm sahələridir. Lakin statistika ilə riyaziyyat əlaqəli elm sahələridirlər. Bu əlaqə oradan irəli gəlir ki, bu elm sahələrinin hər ikisi hadisələrin kəmiyyət tərəflərini öyrənirlər. Ona görə də statistikada hadisələrin kəmiyyət tərəflərini öyrənərkən riyazi üsullarda geniş istifadə olunur.

Riyazi statistika elmi kütləvi hadisələr üzərində aparılan müşahidələrin nəticələrini qeyd etmək qruplaşdırmaq və onları təhlil etmək üsulları kimi yaranmışdır. Riyazi statistika ehtimal nəzəriyyəsinin tərkib hissəsi kimi meydana gəlmişdir. Hazırda riyazi statistika ehtimal nəzəriyyəsindən ayrılaraq müstəqil bir elm kimi inkişaf etməkdədir. Lakin əsas mühakimə metod və üsulları ehtimal nəzəriyyəsində olduğu kimidir. Ehtimal nəzəriyyəsi təsadüfi hadisələrin riyazi modellərini öyrənməklə məşğuldur. Riyazi statistika isə müəyyən mənada bunun tərsi olan məsələ ilə məşğul olur. Belə ki, riyazi statistika ədədi xarakter daşıyan toplanmış statistika məlumatları əsasında müəyyən nəzəri-ehtimal modeli seçməyin müxtəlif metodlarını işləyib hazırlayır. Məsələn, tutaq ki, Bernulli sxemində  asılı olmayan sınaq aparılmış və bunun  saydasında   hadisəsi baş vermişdir. Bu misalda riyazi statistikanın belə bir məsələsi ilə qarşılaşırıq: « sayda asılı olmayan sınaqdan  saydasında baş verən  hadisəsinin  ehtimalını necə tapmalı?»

Bernulli sxemi üzərində riyazi statistikanın həll etdiyi əsas məsələləri göstərək.

**1. Statistik fərziyyələrin yoxlanılması.** Müəyyən mühakimələr əsasında fərz etmək olar ki, axtarılan  ehtimalı  qiymətini alır (burada  qeyd olunmuş ədəddir).  nisbi tezliyi əsasında bu fərziyyənin düzgün olub-olmadığını müəyyən etmək lazım gəlir. Məlum olduğu kimi -in böyük qiymətlərində  nisbəti -yə yaxın qiymətlər alır. Ona görə də  statistik fərziyyəsinin yoxlanılma kriteriyası  fərqinin qiymətləndirilməsinə əsaslanmalıdır. Bu fərq böyükdürsə, deməli fərziyyə səhvdir, kiçik olduqda isə  fərziyyəsini inkar etməyə əsas yoxdur.

**2. Naməlum parametrlərin statistik qiymətləndirilməsi.** Bəzən bizə müşahidə etdiyimiz  ədədinə görə elə  ədədini göstərmək lazım gəlir ki, onu Bernulli sxemində  ehtimalı olaraq qəbul etmək mümkün olsun. Bizim yuxarıda göstərdiyimiz misalda olduğu kimi təbii olaraq  götürmək lazımdır.

**3. Etibarlılıq intervalı.** Bəzi hallarda naməlum  parametrinin dəqiq qiymətini deyil, onun vahidə yaxın ehtimal ilə yerləşdiyi  intervalını tapmaq lazım gəlir. Ucları təsadüfi kəmiyyətlər olub, müşahidə olunan -dən asılı olan  şəklindəki belə intervallara **etibarlılıq intervalları** deyilir.

**2. Baş yıgım və seçmə yıgım**

Fərz edək ki, bir zavodda hazırlanmış detalların tələb olunan standartlara uyğun gəlib-gəlməməsini təyin etmək lazımdır. Detalların sayı çox olduqda bütün detalların yoxlanılması çox vaxt və xərc tələb etdiyi üçün bütün detalların içərisindən seçmə üsulu ilə detallar götürüb yoxlayırlar və bu yoxlamanın nəticəsində bütün detallar haqqında müəyyən fikir yürüdürlər. Bu misalı ümumiləşdirsək, çoxluğun bütün elementlərinin tələb olunan əlaməti ödədiklərini yoxlamaq üçün bu çoxluqdan təsadüfi olaraq seçilən məhdud sayda elementlər tədqiq edilir və alınan nəticələr əsasında bu çoxluğun elementlərinin həmin əlaməti ödəməsinə aid müəyyən fikirlər söylənilir. Bu halda müşahidə və ya tədqiq olunan çoxluq **baş yığım**, ondan təsadüfi olaraq seçilən kiçik həcmli çoxluq isə **seçmə yığım** və ya sadəcə olaraq **seçmə** adlanır. Yığımı təşkil edən elementlərin sayına **yığımın həcmi** deyilir. Məsələn , yuxarıda göstərdiyimiz misalda detalların ümumi sayı , yoxlanılmaq üçün seçilən detalların sayı isə  olarsa, onda baş yığımın həcmi , seçmə yığımın həcmi isə olur.

Riyazi statistikanın əsas məsələlərindən biri baş yığımdan təsadüfi olaraq ayrılan seçmə yığımın xassələrinə əsasən baş yığımın uyğun xassələri haqqında düzgün elmi nəticələr almaqdır.

Seçmə yığım müxtəlif üsullarla düzəldilə bilər.Tutaq ki, baş yığım elementlərindən biri təsadüfi olaraq seçilir və tədqiq olunduqdan sonra yenidən baş yığıma qaytarılır. Bu prosesi  dəfə təkrar etdikdə həcmi  olan **təkrarlı seçmə yığım** alınır.

Baş yığımdan təsadüfi olaraq seçilən elementlər tədqiq olunduqdan sonra baş yığıma qaytarılmadıqda isə **təkrarsız seçmə yığım** alınır. Təkrarlı seçmə yığımda tədqiq olunan element yenidən rast gələ bildiyi üçün praktikada əsasən təkrarsız seçmə yığımdan istifadə olunur.

Seçmə yığım elə olmalıdır ki, o baş yığımın uyğun xassələrini daha düzgün ifadə etsin. Buna **seçmə yığımın nümayəndəli (reprenzetativlik) olması xassəsi** deyilir. Baş yığımın bütün elementlərinin seçmə yığma düşmə ehtimalları eynidirsə və seçmə yığımın bütün elementləri baş yığımdan təsadüfi olaraq seçilirsə, onda böyük ədədlər qanununa görə həmin seçmənin reprenzetativlik xassəsi vardır.

**Təsadüfi seçim üsulları.**

Öyrənilən hadisələrin mahiyyətindən, ümumi çoxluğun həcmindən, müşah­idə edilən əlamətlərin variasiyasından və paylanmasından asılı olaraq müxtəlif seçim üsullarından istifadə edilir. Statistik tədqiqatlar təcrübəsində ən geniş yayılmış seçim üsulları aşağıdakılardır:

**1) təsadüfi; 2) mexaniki; 3) tipik; 4) seriyalı; 5) kombinə edilmiş.**

**Təsadüfi seçim** ümumi  çoxluğundan vahidlərin təsadüfi olaraq seçilmə­sini nəzərdə tutur. Təsadüfi seçim prosesində hər şeydən əvvəl ümumi çoxluğun vahidlərinin seçimə düşməsi imkanlarının eyni olduğuna əmin olmaq lazımdır. Həmçinin ümumi çoxluğun sərhədlərini elə dəqiqləşdirmək lazımdır ki, ayrı-ayrı vahidlərin ona daxil edilməsi və ya edilməməsi şübhə doğurmasın. Məsələn, tələbələrin tədqiq edilməsi zamanı akademik məzuniyyətdə olan şəxslərin, qeyri-dövlət ali məktəb tələbələrinin nəzərə alınıb-alınmamasını göstərmək lazımdır.

Təsadüfi seçim texniki olaraq püşkatma metodu və ya təsadüfi ədədlər cədvəli əsasında həyata keçirilir. Püşkatma üçün ümumi çoxluğun həcminə uyğun gələn sayda püşklər – fişkalar, şarlar və ya kartoçkalar hazırlanmalıdır. Hər bir püşk ümumi çoxluğun ayrıca vahidi haqqında informasiyaya (şəxsin sıra sayı, soyadı və ya ünvanı; hər hansı fərqləndirici əlamət) malik olmalıdır. Seçimin müəyyən edilmiş faizinə müvafiq olaraq ümumi çoxluqdan zəruri sayda püşk təsadüfi qaydada götürülür.

Təsadüfi ədədlər cədvəlinə görə ümumi çoxluğun hər bir vahidi sıra nömrəsinə malik olmalıdır. Təsadüfi ədədlər cədvəli xüsusi proqramın köməyi ilə EHM-dan alınır və ixtiyari ədədlər sütunu kimi ifadə olunur. Seçimə sıra nömrəsi seçilmiş sütundakı ədədlərə uyğun gələn vahidlər daxil edilir.

Təsadüfi seçim prosesində **qaytarmamaq və qaytarmaq şərtilə** aparılan seçim sxemlərini fərqləndirirlər. Qaytarmamaq (təkrarı olmayan) şərti ilə təsadüfi seçimdə – ümumi  çoxluğundan ixtiyari qaydada obyektlərin bir-bir ardıcıl surətdə götürülməsilə aparılır və seçilmiş obyektlər sonrakı seçimdə iştirak etmir, seçilməmiş bütün obyektlərin seçilməsi ehtimalları eyni hesab olunur.   elementli çoxluqdursa, onda qaytarmamaq şərtilə  həcmli seçimlərin sayı

 olacaqdır.

Qaytarmaq şərti ilə təsadüfi seçim ( təkrarı olan seçim) – -dan ixtiyari qaydada seçilən obyekt hər dəfə məhz bu çoxluqdan götürülür, belə ki, eyni bir obyekt təkrar götürülə bilər.   elementli çoxluq olarsa, qaytarmaq şərtilə  həcmli seçimlərin sayı olacaqdır. Bu halda  elementli çoxluqdan  həcmli seçim qaytarmaq şərtilə sxemi üzrə aparılır, deyilir.

Təkrarı olmayan seçim zamanı püşkatma prosesində düşən püşklər geriyə, ilkin yığıma qaytarılmır və sonrakı seçimdə iştirak etmirlər. Təsadüfi ədədlər cədvəlindən istifadə etdikdə seçimin təkrar olmamasına seçimdə iştirak etmiş ədədlərin buraxılması yolu ilə nail olunur.

Əgər seçimdə hər bir obyektin hər hansı bir qaydadan asılı olmadan eyni  ehtimalı ilə seçilməsi qərarı qəbul edilirsə, onda alınan statistik seçim **binomial seçim** adlanır.

**Tipik seçim** o halda tətbiq olunur ki, ümumi çoxluğun bütün vahidlərini bir neçə tipik qruplara bölmək mümkün olur. Məsələn, əhalinin tədqiq olunması zamanı belə qruplar rayonlar, sosial, yaş və ya təhsil qrupları ola bilər. Tipik seçim hər bir tipik qrupdan vahidlərin təsadüfi və ya mexaniki üsulla seçilməsini nəzərdə tutur.

Ümumi çoxluq hər hansı qaydada nizamlanmış olduqda, yəni vahidlər müəyyən ardıcıllıqla düzüldükdə (işçilərin tabel nömrəsi, seçicilərin siyahısı, respondentlərin telefon nömrələri, evlərin telefon nömrələri, binaların və mənzillərin nömrələri və s.) **mexaniki seçim** tətbiq edilir.

**Mexaniki seçimi** aparmaq üçün seçimin həcminin ümumi çoxluğun həcminə nisbəti ilə müəyyən olunan seçim proporsiyası müəyyənləşdirilir. Məsələn, əgər 100000 vahiddən ibarət olan çoxluqdan 2%-li seçim götürmək nəzərdə tutulursa, yəni 2000 vahid götürülməlidirsə, onda seçim proporsiyası  olar. Vahidlərin seçil­məsi müəyyən olunmuş proporsiyaya müvafiq olaraq bərabər fasilələr (inter­vallar) üzrə həyata keçirilir. Məsələn, 1:50 proporsiyasında (2 %-li seçim) hər bir 50-ci vahid, 1:25 proporsiyasında isə (4 %-li seçim) – hər bir 25-ci vahid götürülür.

Ümumi çoxluğun vahidləri böyük olmayan qruplarda və ya seriyalarda birləşmiş olduqda **seriyalı seçim** üsulunun tətbiqi əlverişli olur. Belə seriyalar kimi əmtəə partiyası, tələbə qrupları, briqadalar və başqa birləşmələr götürülə bilər. Seriyalı seçimin mahiyyəti təsadüfi və ya mexaniki üsulla seriyaların seçilməsindən və onlar daxilində vahidlərin ucdantutma tədqiqinin həyata keçiril­məsindən ibarətdir.

Statistik tədqiqat təcrübəsində yuxarıda qeyd olunan üsullardan başqa onların **kombinasiyası** da tətbiq edilir. Məsələn, seriyalar müəyyən olunmuş qaydada bir neçə tipik qrupdan götürülürsə, onda tipik və seriyalı seçimləri kombinə etmək (birləşdirmək) olar. Ayrı-ayrı vahidlər seriyalar daxilindən təsadüfi qaydada götürüldükdə isə təsadüfi və seriyalı seçimlərin kombinasiyası mümkün­dür. Belə seçimin xətası seçimin pilləliyi ilə müəyyən olunur.

Ümumi çoxluqdan əvvəlcə iri həcmli qruplar, sonra bir qədər kiçik həcmli qruplar götürülməklə və bu qaydada davam edərək tədqiq edilən vahidlər seçilirsə, bu cür **seçim çoxpilləli** adlanır. Çoxpilləli seçimdən fərqli olaraq **çoxfazalı seçim** onun aparılmasının bütün mərhələlərində eyni vahidlərin saxlanmasını nəzərdə tutur.

**Paylanma və variasiya sırası.**

Tutaq ki,  ümumi çoxluğundan  həcmli təsadüfi  seçimi götürülmüşdür.

***Tərif*** ***1.*** Əgər  olarsa, onda seçimin elementlərinin  ardıcıllığı şəklində yazılışına **variasiya sırası**,  fərqinə isə **seçimin boyu** deyilir.

Tutaq ki,  seçiminin elementləri içərisində  sayda müxtəlif  elementləri vardır.  ilə  elementinin təkrarlanma sayını işarə edək. Elementin təkrarlanma sayına onun **tezliyi (çəkisi)** deyilir.Aydındır ki, tezliklərin cəmi seçimin həcminə bərabərdir, yəni .

***Tərif*** ***2.***  cütləri ardıcıllığına seçimin **statistik sırası** və ya **paylanma sırası** deyilir.

**Nisbi tezlik, statistik paylanma və histoqram**

Fərz edək ki,  həcmli seçmə rolunu  təsadüfi kəmiyyəti oynayır.  təsadüfi kəmiyyətinin -ci sınaqlarda olan qiymətlərini  ilə işarə edək.Bəzən bunları aşağıdakı cədvəl şəklində verirlər.

**Cədvəl 1**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| I | 1 | 2 | 3 | ... | *n* |
|  |  |  |  | ... |  |

Ola bilər ki,  təsadüfi kəmiyyətinin götürülən qiymətləri arasında bərabərləri olsun.  təsadüfi kəmiyyətinin  qiymətinin  dəfə,  qiymətinin  dəfə və sair  qiymətinin  dəfə götürüldüyünü fərz edək. Onda , ,... ədədlərinə bu **qiymətlərin tezlikləri** deyilir. Aydındır ki, təsadüfi kəmiyyətlərin bütün qiymətlərinin tezlikləri cəmi seçmənin həcminə bərabərdir: . Təsadüfi kəmiyyətin qiymətləri ilə tezlikləri arasındakı əlaqəni aşağıdakı cədvəl şəklində vermək olar:

**Cədvəl 2**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | ... |  |
|  |  |  |  | ... |  |

 tezliyinin seçmənin  həcminə olan nisbətinə  **qiymətinin nisbi tezliyi deyilir** və  ilə işarə olunur:



 təsadüfi kəmiyyətinin bütün qiymətlərinin nisbi tezliklərinin cəmi vahidə bərabərdir. Doğrudan da, olduğun üçün

.

Təsadüfi kəmiyyətin qiymətləri ilə nisbi tezlikləri arasındakı əlaqəni göstərən aşağıdakı cədvələ diskret **təsadüfi kəmiyyətin statistik paylanması** deyilir.

**Cədvəl 3**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | ... |  |
|  |  |  |  | ... |  |

 kəsilməz təsadüfi kəmiyyət olduqda onun statistik paylanmasını başqa şəkildə vermək məqsədəmüvafqdir.  təsadüfi kəmiyyətinin  intervalına düşməsinin nisbi tezliyini  ilə işarə edək. Onda **kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin statistik paylanmasını** aşağıdakı cədvəl şəklində verirlər.

**Cədvəl 4**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | ... |  |
|  |  |  |  | ... |  |

Seçmənin və onun statistik paylanmasını əyani təsəvvür etmək üçün bəzən qrafiklərdən istifadə edirlər. Bunun üçün cədvəl 3-dəki sütunlara uyğun olan  nöqtələrini koordinant müstəvisi üzərində qurub, bu nöqtələri ardıcıl olaraq düz xətt parçaları ilə birləşdirirlər. Qeyd edək ki, riyazi statistika nöqteyi-nəzərdən yalnız təpə nöqtələri maraqlıdırlar.



























Bəzən kəsilməz təsadüfi kəmiyyətləri əyani təsəvvür etmək üçün **histoqram** adlanan xüsusi diaqramlardan istifadə olunur.

**4.Empirik paylanma funksiyası**

Fərz edək ki, paylanma funksiyası  olan  təsadüfi kəmiyyəti baş yığım rolunu oynayır. Bu baş yığımdan ayrılan təsadüfi seçmə yığımı  ilə işarə edək. Seçilmiş bu  qiymətlərinə **variantlar** deyilir. Həmin qiymətlərin artan şəkildə

 (1)

yazılışına **variasiya sırası** deyilir.

Elə bir köməkçi  diskret təsadüfi kəmiyyətinə baxaq ki, bu təsadüfi kəmiyyət  seçməsini təşkil edən qiymətlərin hər birini eyni  ehtimalı ilə alsın. Başqa sözlə



olsun. Belə  diskret təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasına  seçməsinin paylanması deyilir.  ilə ixtiyari həqiqi ədədi işarə edək.  ədədləri içərisində -dən kiçik olanlarının sayını  ilə işarə edək. Onda  hadisəsi  sayda  kimi hadisələrin cəmindən ibarət olduğu üçün

 (2)

Buradan  ilə seçmənin -dən kiçik elementləri işarə olunmuşlar.

(2) düsturu ilə təyin olunan funksiyaya **seçmənin paylanma funksiyası** və ya **empirik paylanma funksiyası** deyilir.

Empirik paylanma funksiyasını  ilə işarə edirlər. Tərifə əsasən

. (3)

Hadisənin başvermə tezliyi onun ehtimalının təqribi qiyməti olduğu kimi, empirik paylanma funksiyası olan -i, baş yığımın  paylanma funksiyasının təqribi qiyməti hesab etmək olar. Empirik paylanma funksiyası paylanma funksiyasının malik olduğu oxşar xassələrə malikdir.

Bernulli teoreminə görə  şərtində seçmənin  empirik paylanma funksiyası ehtimala görə baş yığımın  paylanma funksiyasına yığılır. Yəni istənilən  həqiqi ədədi və  ədədi üçün



bərabərliyi doğrudur.

 funksiyası adi paylanma funksiyasının bütün xassələrini ödəyir.

Doğrudan da,

1) soldan kəsilməzdir ,

2) monoton azalmayan funksiyadır;

3) olduqda ixtiyari  üçün  bərabərsizliyi ödənilən sınaqların sayı sıfıra,  olduqda  bərabərsizliyini ödəyən sınaqların sayı - ə bərabər olur,

4)  olduqda isə  olduğundan

 (4) empirik paylanma funksiyasının ifadəsidir.

Empirik paylanma funksiyası riyazi statistikada fundamental rol oynayır. O, təsadüfi seçimi, yəni statistik məlumatları kifayət qədər yaxşı təsvir edir. Sınaqların sayı qeyri - məhdud olaraq artdıqca empirik paylanma funksiyası ümumi çoxluğun ümumi (nəzəri) paylanma funksiyasına yaxınlaşır.

**Teorem 1 (Qlivenko - Kantelli teoremi)*.***İxtiyari qeyd edilmiş üçün empirik paylanma funksiyası ümumi paylanma funksiyasına ehtimala görə yığılır. Yəni ixtiyari və ixtiyari üçün

 (5)

Beləliklə, seçimin həcmi kifayət qədər böyük olduqda hər bir *x* nöqtəsində empirik paylanma funksiyasının qiyməti həmin nöqtədə ümumi paylanma funk-siyasının təqribi qiyməti olaraq götürülə bilər, yəni . Bu mənada empi-rik paylanma funksiyası nəzəri paylanma funksiyasının statistik analoqu olaraq qəbul edilir.

**Teorem 2 (Kolmoqorov teoremi).** Əgər ümumi çoxluğun F(x) paylanma funksiyası kəsilməz olarsa, onda empirik paylanma funksiyası F(x) - ə vahid ehtimalla x -ə görə müntəzəm yığılır.

Kolmoqorov teoremindən empirik paylanmanın verilmiş nəzəri paylanma ilə uzlaşması haqqında hipotezlərin yoxlanılmasında istifadə olunur.

**Misal 1.** Seçimin verilmiş paylanma sırasına görə empirik paylanma funksiyasını tapın və qrafikini qurun:

**Həlli:**Ən kiçik variant 2- yə bərabərdir. Deməli,  olduqda .



 qiyməti, yəni  qiyməti 1 dəfə müşahidə olunmuşdur. Deməli,

2 olduqda = .

 qiyməti, yəni  və  qiymətləri 1 + 3 = 4 dəfə müşahidə olunmuşdur. Deməli,  olduqda

= 

 qiyməti, yəni ,  və  qiymətləri 1 + 3 + 2 = 6 dəfə müşahidə olunmuşdur. Onda  olduqda = .

 ən böyük qiumətdir. Onda  olduqda  olur.

Beləliklə, aşağıdakı empirik paylanma funksiyasını alırıq:





0,6



0,1

0,4

0

2

5

7

**

**ƏDƏBİYYAT**

1. M.M.Səbzəliyev “Ali riyaziyyatdan mühazirələr” II hissə, Bakı-2014,

XI fəsil II bölmə, **§**1-**§**3.

**Sıxlıq funksiyasının parametrlərinin qiymətləndirilməsi.**

**Poliqon və histoqram. Paylanma əyriləri**

***1.* Sıxlıq funksiyasının qiymətləndirilməsi.**

Sıxlıq funksiyasının qiymətləndirilməsi olaraq **tezliklərin poliqonu** və **histoqramı** götürülür.

**Tərif 1.** Müstəvidə ordinat oxu üzərində *n­­­­­­­­­­­­­i* - ləri, absis oxu üzərində *xi* – ləri qeyd etməklə  *­­­­­­­­­­­­­­­­­­­­*nöq­tə­lə­rini düz xətt parçaları ilə birləşdirsək, alınan sınıq xəttə **tezlik­lərin poliqonu** deyilir.

**Tərif 2.** Müstəvi üzərində  nöqtələrini birləşdirən sınıq xətt **nisbi tezliklər poliqonu** adlanır.

Tərifdən görünür ki, nisbi tezliklər poliqonu tezliklər poliqonunu OY oxu boyunca n dəfə sıxmaqla alınır.

Seçimin həcmi kifayət qədər böyük olduqda paylanma funksiyasının qurulması çətinlik yaradır. Qarşıya çıxan çətinliyi aradan qaldırmaq üçün qruplaş-dırılmış seçimlərdən istifadə edilir. Bu məqsədlə onun elementlərini müəyyən qruplarda birləşdirilərək, seçim qruplaşdırılmış statistik sıra şəklində verilir. Bunun üçün seçimin bütün elementlərini öz daxilində saxlayan interval tapılır və o, qruplaşdırma və ya xüsusi intervallar adlanan kəsişməyən intervallara ayrılır. Bundan sonra hər bir belə intervaldakı elementlərin sayı (intervalın tezliyi) tapılır. Qruplaşdırma intervalının sağ uc nöqtəsi ilə üst-üstə düşən element növbəti qruplaşdırma intervalına aid edilir. Statistik sıranın birinci sətrində xüsusi inter-valların orta nöqtələri, ikinci sətrində isə onların tezlikləri yazılır.

Əgər qruplaşdırma intervalları eyni uzunluğa malik olarsa, onda seçimin xarakteristikalarının hesablanması nəzərə çarpacaq dərəcədə sadələşir. Bu halda qruplaşdırma intervallarının sayı ingilis statistiki Sterdjesin təklif etdiyi

düsturu ilə tapılır.

Onda qruplaşdırma intervalının uzunluğu kimi tapılır və qruplaş-dırılmış seçim aşağıdakı cədvəl şəklində verilir:

**Qrupl-ma int-rı**:+b) +b,+2b) + (k1)b,+ kb)

**Tezliklər:**

Qeyd edək ki, seçimin qruplaşdırılması sonrakı hesablamalarda müəyyən xəta ilə müşahidə olunur və qruplaşdırma intervallarının sayı ilə xətanın qiyməti tərs mütənasib olur.

Nisbi tezliklər histoqramı tezliklər histoqramını  oxu boyunca ** dəfə sıxmaqla alınır.

Ümumi sıxlıq funksiyası kifayət qədər hamar funksiya olduqda nisbi tezliklərin poliqonu histoqrama nəzərən sıxlıq funksiyasının daha yaxşı qiyməti olur.

Histoqram statistik məlumatların əyani təsvir üsullarından biridir. Histoq-ramın qrafiki altında qalan pilləvarı fiqurun sahəsi seçimin həcminə bərabərdir.

Eyni qayda ilə nisbi tezliklərin histoqramı təyin edilir. Bu halda uyğun pilləvarı fiqurun sahəsi 1- ə bərabərdir.

Qeyd edək ki, seçimin həcmi artdıqca və qruplaşdırma interva­lının uzunluğu kiçildikcə nisbi tezliklərin histoqramı ümumi sıxlıq funksiyasının statistik analoqu kimi qəbul olunur.

Histoqramı qurmaq üçün  təsadüfi kəmiyyətinin qiymətlər oblastı bərabər uzunluqlu qruplaş­dırma intervallarına ayrılır və hər bir intervala düşən elementlərin sayı tapılır. Qruplaşdırma intervallarının uzunluğunu , - ci qruplaşdırma inter-valının tezliyini isə *ni* ilə işarə edək. Düzbucaqlı koordinat sistemində oturacaqları qruplaşdırma intervalları və hündürlükləri uyğun  olan düzbucaqlıları quraq. Alınan pilləvari fiqura seçimin histoqramı deyilir. Aydındır ki, qurulmuş hər bir düzbucaqlının sahəsi – yə, yəni intervalın nisbi tezliyinnə bərabərdir. Bernulli teoreminə görə  olduqda  nisbi tezliyi ehtimala görə  təsadüfi kəmiyyətinin - ci intervaldan qiymət alması ehtimalına yığılacaqdır. Qruplaşdırma intervallarının  uzunluqları kifayət qədər kiçik,  təsadüfi kəmiyyətinin  sıxlıq funksiyası isə kəsilməz olduqda bu ehtimal təqribən  olar, burada  - ci qruplaşdırma intervalının orta nöqtəsidir.

Deyilənlərdən aydın olur ki, seçimin həcmi kifayət qədər böyük, qruplaşdırma intervallarının *b* uzunluqları isə kifayət qədər kiçik olduqda qurulmuş düzbucaqlıların  hündürlüklərinə  sıxlıq funksiyasının uyğun qruplaşdırma intervallarının  orta nöqtəsindəki qiymətləri kimi baxmaq olar. Beləliklə, histoqramın yuxarı sərhədlərinə müşahidə edilən  təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyasının analoqu kimi baxmaq olar.

Qeyd edək ki, histoqramın bir sıra çatışmazlıqları vardır. **Bu çatışmazlıqlara** aşağıdakıları misal göstərmək olar.**:**

1) qruplaşdırma intervallarının qurulması üsullarının qeyri - müəyyənliyini,

2) qruplaşdırma zamanı informasiyanın itirilməsini (bu zaman seçimi məlumatlar əvəzinə onların tezliklərindən istifadə edilir).

Ona görə də histoqramdan statistik məlumatların ilkin analizində istifadə etmək məqsədəuyğundur.

***Misal 1.*** Seçimin verilmiş paylanma sırasına görə tezliklər və nisbi tezliklər poliqonunu qurun.



**Həlli:** ** variantlarını absis oxu üzərində, uyğun  tezliklərini isə ordinat oxu üzərində ayıraq. ** nöqtələrini düz xətt parçaları ilə birləşdirsək, onda axtarılan **tezliklər poliqonunu** alarıq.

Seçimin həcmini tapaq:

.

Nisbi tezlikləri tapaq:

, =1,2,3,4.

** variantlarını absis oxu üzərində, uyğun  nisbi tezliklərini isə ordinat oxu üzərində ayıraq. Alınan ** nöqtələrini düz xətt parçaları ilə birləşdirsək, onda axtarılan **nisbi tezliklər poliqonunu** alarıq.

***Misal 2.*** Həcmi  olan seçimin paylanma sırası verilmişdir:

Qruplaşdırma

intervalları: 

Tezliklər: 

Tezliklərin histoqramını quraq.

**Həlli.** Qruplaşdırma intervalının üzunluğu -dür. Məsələnin şərtinə görə tapırıq:

 və 

3

12,5



*x*

2,5

5

0

1

5

9

13

17

21

2

Şəkil 1

**2. Paylanma əyriləri.** Empirik paylanma funksiyası vahid ehtimalla ümumi çoxluğun paylanma funksiyasına yığılır. Buradan aydın olur ki, qruplaşdırma inter-vallarının uzunluqları sonsuz olaraq kiçilərsə və hər bir belə intervalda elementlə-rin sayı kifayət qədər olarsa, onda paylanmanın poliqon və histoqramı müəyyən formalı səlis əyriyə yaxınlaşacaq. Empirik paylanmanın yaxınlaşdığı limit əyrisinə **paylanma əyrisi** deyilir.

Təcrübədə birtəpəli və çoxtəpəli (bir modalı və çox modalı) paylanmaları fərqləndirirlər.

Çoxtəpəli paylanmalar üçün növbələşən maksimum və minimumların möv -cudluğu xarakterikdir. Paylanmanın çoxtəpəliliyi öyrənilən ümumi çoxluğun qeyri-bircinsliyinə dəlalət edir.

Birtəpəli paylanma əyrilərini əsasən aşağıdakı qruplara bölürlər:

1) simmetrik; 2) orta simmetrik; 3) müntəzəm; 4) kəsilməz; 5) kəskin asimmetrik (J- şəkilli); 6) çökük (U- şəkilli).

Simmetrik paylanmalarda elementlərin tezlikləri hər hansı səpələnmə mər-kəzindən uzaqlaşdıqca azalır və paylanmanın mərkəzindən hər iki tərəfə bərabər olurlar. Bu cür paylanmaların əyriləri orta qiymətin ordinatına nəzərən simmetrik olurlar (məsələn, normal paylanma).

Empirik paylanmalar adətən asimmetrik olurlar. Əgər səpələnmə mərkəzinin bir tərəfində digərinə nisbətən tezliklər əhəmiyyətli dərəcədə azalırsa, belə pay-lanmalara **orta asimmetrik paylanmalar** deyilir. Bu cür paylanmalarda mərkəz-dən eyni uzaqlıqda əlamətin qiymətlərinin ordinatları müxtəlif olurlar. Əgər ən böyük tezlik paylanmanın uclarından birində olarsa, ona **kəskin** **asimmetrik paylanma** deyilir. U şəkilli paylanmalarda minimal tezlik səpələnmə mərkəzinə yaxın olur və mərkəzdən paylanmanın uclarına doğru tezliklər artır.

**Mühazirə № 14.** Orta qiymətlərin hesablanması üsulları. Seçmə orta və seçmə dispersiya,onların xassələri. Empirik paylanmanın normal paylanmadan meyli. Asimmetriya və eksses

Təsadüfi seçimin səpələnmə xarakteristikaları

**Qısa icmalı:**

Orta qiymətlərin hesablanması düsturları. Təsadüfi seçimin yerləşmə xarakteristikaları: seçmə orta və onun xassələri. Təsadüfi seçimin moda və medianı. Təsadüfi seçimin səpələnmə xarakteristikaları: seçmə dispersiya, seçimin boyu, kvantil, variasiya əmsalı, seçimin orta mütləq yayınması. Seçmə dispersiyanın xassələri. Empirik paylanmanın normal paylanmadan meylinin qiymətləndirilməsi. Asimmetriya və eksses əmsalları.

**1.Seçmə yıgımın riyazi gözləməsi və dispersiyası**

Fərz edək ki, paylanma funksiyası  olan təsadüfi kəmiyyət baş yığım rolunu oynayır. Bu baş yığımdan  seçmə yığım ayrılmışdır.  qiymətlərinin hər birini  ehtimalı ilə alan diskret təsadüfi kəmiyyəti  ilə işarə edək.  təsadüfi kəmiyyətinin ədədi xarakterimtikalarına (riyazi gözləmə, dispersiya, momentlər) **seçmənin ədədi xarakteristikaları** deyilir.

 olduğu üçün **seçmənin** **riyazi**  **gözləməsi**



düsturu ilə təyin edilir və  kimi işarə olunur. Beləliklə, seçmənin riyazi gözləməsi üçün

 (1)

düsturunu alırıq.

Dispersiyanın məlum  düsturuna görə seçmənin dispersiyası aşağıdakı düstur ilə təyin edilir:



Seçmənin dispersiyasını  ilə işarə edirlər. Beləliklə, seçmənin dispersiyası üçün

 (2)

düsturu doğrudur.

**2.Seçmə yıgımın momentləri**

Məlum olduğu kimi,  təsadüfi kəmiyyətinin  tərtibli başlanğıc momenti  düsturu ilə təyin edilir. Onda  seçməsinin  tərtibli başlanğıc momenti üçün yaza bilərik:



Seçmənin  tərtibli başlanğıc momentini  ilə işarə edirlər. Beləliklə seçmənin  tərtibli başlanğıc momenti üçün

 (3)

düsturunu alırıq.

Məlumdur ki,  tərtibli mərkəzi momenti  düsturu ilə təyin edilir. Bu düstura əsasən



Seçmənin  tərtibli mərkəzi momentini  ilə işarə edirlər. Deməli

 (4)

düsturu doğrudur.

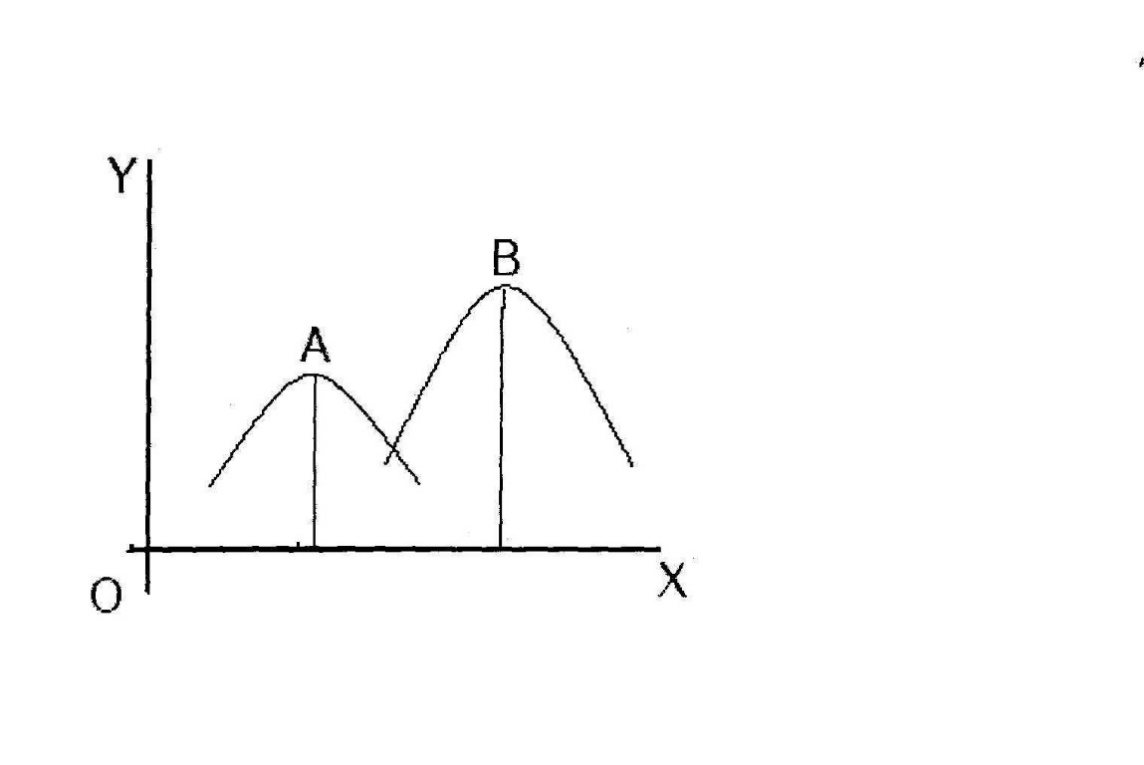
(3)-də  götürüb, (1)-i nəzərə alsaq,  alarıq. (4)-də  yazıb, (2)-ni nəzərə alsaq,  olar.

**Təsadüfi seçimin yerləşmə xarakteristikaları**

**1. Statistik paylanmaların tədqiqinin əsas məsələləri.** Statistik paylanma-nın əsas xüsusiyyətlərinin ədədi xarakteris­tikalar vasitəsilə ifadə edilməsi, baxılan ümumi çoxluğa xas olan qanunauyğun­luqların daha dərindən və hərtərəfli öyrənil-məsinə imkan verir.

Bu xarakte­ristikalar isə obyektiv bir göstərici olaraq ümumi çoxluğun əsas xüsusiyyətlərini və verilmiş paylanma haqqında məlum olan bütün məlumatları özündə əks etdirməlidir

Məntiqi cəhətdən bu xarakteristikaların paylanmanın hansı xüsusiyyətlərini əks etdirməsinin zəruriliyi ilə tanış olaq. Bunun üçün 1- ci şəkildə göstərilən  və  paylanmalarına baxaq:



Şəkil 1. Müxtəlif ortalara və dispersiyalara malik paylanmalar

**m1**

**m2**

Bu paylanmaların ədədi xarakteristikalar vasitəsilə ifadə edilə bilən mühüm xüsusiyyətləri aşağıdakılardır:

1. Şəkildən göründüyü kimi hər iki paylanmada ümumi çoxluğun ele­ment­ləri əlamətin müəyyən mərkəzi qiyməti, yəni orta səviyyəsi ətrafında topalanırlar.Qeyd edək ki, bu xüsusiyyət bir qayda olarq bütün statistik paylanmalara aiddir.Ona görə də statistik pay­lanmaların xüsusiyyərtlərinin tədqiqində birinci mərhələ onların mərkəzi qiymətinin tapılmasından ibarətdir. Bunun üçün paylanmanın yerləşmə xarakteristikalarından (mərkəzi meyl xarakteristikaları) istifadə olunur.

2. Paylanmalar mərkəzi qiymətlərlə yanaşı əlamətin qiymətlə­rinin mərkəzi qiymət ətrafında səpələnməsinə görə də fərqlənirlər.

Beləliklə, paylanma sıralarının tədqiqində ikinci mərhələ əlamətin səpələnmə xarakteristikalarının axtarılmasından ibarətdir.

3. Müxtəlif paylanma əyrilərinin müqayisəsi göstərir ki, on­lar simmetriyaya görə də fərqlənirlər. Belə ki, təpədən başlayaraq, paylanmanın bir tərəfi digərinə nəzərən daha uzun (meylli enişə) malik olar. Bununla əlaqədar olaraq üçüncü mühüm məsələ paylanmaların **çəplik dərəcəsini** ölçməkdən ibarətdir.

4. Müxtəlif paylanma əyrilərinin normal əyri ilə müqayisəsi gös­tə­rir ki, bəzi paylanma əyriləri normal əyriyə nəzərən absis oxu boyun­ca ’’sıxılmış’’, digərləri isə ordinat oxu boyunca ’’dartılmış’’ olurlar. Ona görə də paylanmaların **diklik dərəcəsini** qiymətləndirmək lazım gəlir.

Beləliklə, ümumi şəkildə paylanma sıralarının statistik təsviri məsələsi əlamətin mərkəzi qiymətinin tapılmasından və variasiyasını qiymətləndirməkdən, paylanmanın çəplik və diklik dərəcəsini qiymətləndirən xarakteristikaların tapılmasınadan ibarətdir. Bunun üçün paylanmanın uyğun kəmiyyət xarakteristikalarından istifadə olunur.

**2. Təsadüfi seçimin ədədi xarakteristikaları*.*** Burada statistik verilənlərin işlənilməsində istifadə olunan statistik xarakteristikalar verilir.

Tutaq ki,  paylanma funksiyası  olan ümumi çoxluqdan  həcmli  təsadüfi seçiminin realizasiyasıdır.

***Tərif******1.*** qiymətlərini uyğun olaraq  ehtimalları ilə alan diskret təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikalarına seçimin  təsadüfi kəmiyyətlərinə uyğun ədədi xarakteristikaları deyilir.

**Ədədi xarakteristikalar iki qrupa – yerləşmə və səpələnmə xarak­teristikalarına** bölünür.

## 

## 3. Yerləşmə xarakteristikaları. Paylanmaların statistik xarakteristikala-rından ən sadəsi yerləşmə xarakteristikalarıdır.

***Tərif*** ***2.*** Seçimin yerləşmə xarakteristikası elə sabitə deyilir ki, onun bütün elementləri bu sabit ətrafında topalanmış olsun.

**Seçimi orta, seçimi moda və seçimi median ən çox istifadə edilən yerləşmə xarakteristikalarıdır**.

*Tərif* *1*-dən istifadə edərək təsadüfi seçimin yerləşmə xarakteristikala­rının hesablanmasının uyğun düsturlarını verək.

Ehtimal nəzəriyyəsindən məlumdur ki,  qiymətlərini uyğun olaraq  ehtimalları ilə alan diskret təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi



düsturu ilə hesablanır. İxtiyari  üçün



olduğunu nəzərə alsaq,



olur. Axırıncı düsturun sağ tərəfindəki ifadə **seçimi orta** adlanır və  ilə işarə olunur:

 (13.1)

Tutaq ki, təsadüfi seçimin elementləri içərisində  sayda müxtəlif olan  elementləri vardır və  elementinin tezliyi  ədədinə bərabərdir.  elementinin  tezliyinə onun çəkisi də deyilir.

Onda

, 

və

 (13.2)

olduğunu alarıq.

(13.1) düsturuna seçimi ortanın **sadə**, (13.2) düsturuna isə **çəkili düsturu** deyilir.

Təcrübədə seçimi ortanı hesabladıqda seçimin bütün elementləri müxtəlif və yaxud eyni tezliklərə malik olduqda sadə, əks halda isə çəkili düsturdan istifadə etmək məqsədəuyğundur.

Qruplaşdırılmış seçimlərin seçimi ortasını çəkili düstur ilə hesablamaq olar. Bu zaman  əvəzinə -ci qruplaşdırma intervalının orta nöqtəsi,  əvəzinə isə seçimin bu intervalda yerləşən elementlərinin sayı, yəni intervalın tezliyi götürülür.

***Teorem******1.*** Seçimin elementlərinin seçimi ortadan yayınmaları cəmi sıfıra bərabərdir. Yəni 

Isbatı. Doğrudan da,



Bu bərabərlikdə  olduğunu nəzərə alsaq,

 olduğunu alarıq.

Təsadüfi seçimin **həndəsi ortası**

 , (13.3)

**harmonik ortası**

 , (13.4)

**kvadratik ortası** isə

 (13.5)

düsturu ilə hesablanır.

Aydındır ki, eyni bir seçimə görə hesablanmış müxtəlif seçimi ortalar da müxtəlif olacaqdır.

Deyilənləri aşağıdakı misalların üzərində izah edək.

***Məsələ 1.*** Fəhlələrin aylıq əmək haqqı haqqında aşağıdakı məlumatlar verilmişdir.

Сədvəl 13.2. Fəhlələrin aylıq əmək haqqı

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Tabel nömrəsi | 15 | 16 | 27 | 30 | 20 | 41 | 25 | 32 | 18 | 49 | Cəmi |
| Aylıq əmək haqqı, manat | 54 | 56 | 60 | 71 | 85 | 89 | 90 | 107 | 120 | 125 | 900 |

Orta aylıq əmək haqqını tapaq.

**Həlli**. Orta aylıq əmək haqqını tapdıqda nəzərə almaq lazımdır ki, ümumi əmək haqqı fondunda  -ləri,  ilə əvəz etdikdə ümumi əmək haqqı fondu dəyişmir (əmək haqqı fondunun təyinedici xassəsi).

Deməli,



Buradan isə



olduğunu alarıq. Beləliklə, fəhlələrin orta aylıq əmək haqqı



təşkil edir. Bu isə onu göstərir ki, baxılan halda əlamətin orta qiyməti, yəni orta aylıq əmək haqqı hesabi ortanın düsturu ilə hesablanmalıdır.

***Məsələ 2.*** Bazarda müəyyən miqdarda meyvə satılmışdır:

Cədvəl 13.3.

Satış haqqında məlumat

|  |  |
| --- | --- |
| 1 kq-ın qiyməti, man | Satışdan daxil olan pul, man |
| 0.6 | 600 |
| 0.4 | 2000 |
| 0.2 | 800 |

1 kq meyvənin orta satış qiymətini tapaq.

**Həlli.** 1 kq-ın orta qiymətini  qəpik kimi götürsək, bu səhv addım olar.

Doğrudan da, cəmi



meyvə satılmışdır.

Onda orta satış qiyməti ilə satışdan daxil olan pul  manat təşkil edər. Ancaq satışdan faktiki daxil olan pul 3400 manat təşkil edir.

Baxılan məsələdə əlamətə (1 kq-ın orta satış qiymətinə) nisbətən çoxluğun təyinedici xassəsi satışdan daxil olan pulun məbləğinin (man.) dəyişməzliyidir. Beləliklə, orta satış qiyməti



bərabərliyindən tapılmalıdır.

Beləliklə, 1 kq meyvənin orta satış qiyməti



manat təşkil edir.

***Məsələ 3.*** Müəssisədə son 5 ildə istehsalın həcmi haqqında aşağıdakı məlumatlar verilmişdir:

Cədvəl 4.

İstehsalın həcmi haqqında məlumat

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| İllər | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 |
| İstehsal, ədəd | 3000 | 8000 | 25000 | 37000 | 52000 |

Orta artım sürətini tapaq.

Həlli. Əvvəlcə illər üzrə artım sürətini hesablayaq:

2008-ci ildə: ;

2009-cu ildə: ;

2010-cu ildə: ;

2011-ci ildə: 

Burada əvvəlki məsələdən fərqli olaraq təyinedici xassə  hasilinin dəyişməzliyidir:



Buradan isə əlamətin orta qiymətinin hesablanması üçün həndəsi ortanın düsturu alınır:



Beləliklə, orta artım sürəti təxminən –yə bərabərdir.

**3. Təsadüfi seçimin modası və medianı.**

***Tərif******3.*** Təsadüfi seçimin ən böyük tezliyə malik olan elementinə onun **modası** deyilir.

**Qruplaşdırılmamış seçimlərin** **modasını** tapmaq üçün heç bir hesablama aparmaq lazım gəlmir. Belə ki, tərifə görə paylanma sırasında ən böyük tezliyə uyğun olan element seçimi moda olacaqdır.

***Tərif 4.*** Seçimin variasion sırasını hər birində təxminən eyni sayda element olan iki bərabər hissəyə ayıran elementə **seçimin medianı** deyilir.

**Məsələ 5**. Qruplaşdırma

intervalları: 

Tezliklər: 

**Qruplaşdırılmış seçimin seçimi modasını və medianını** hesablayaq.

**Həlli**. Seçimi moda və seçimi medianı hesablayaq. Bunun üçün qruplaş-dırılmış seçimin paylanma sırasını quraq:



Aydındır ki, seçimin modası  , seçimin medianı isə (6 + 8) /2 = 7 olur.

**4. Seçimi ortanın xassələri. Orta qiymət haqqında teorem.**Tutaq ki,  və  ümumi çoxluqları arasında  xətti asılılığı vardır, burada  və  ixtiyari sabitlərdir.

**Teorem 2.** Tutaq ki, .Onda .

**İsbatı.**  və  ümumi çoxluqları arasında  xətti asılılığı olduğuna görə



Tərifə görə



 , 

olduğunu nəzərə alsaq,



olar.

**Teorem 2*-*** dən hesabi ortanın aşağıdakı xassələrini almaq olar:

**1**. Seçimin elementlərini  qədər artırsaq (azaltsaq), hesabi orta da  qədər artar (azalar).

**2**.Seçimin elementlərini  dəfə artırsaq (azaltsaq), hesabi orta da  dəfə artar (azalar).

Bu xassələrə hesabi ortanın **monotonluq xassəsi** deyilir.

**3**. Seçimin elementlərinin bir hissəsini onların xüsusi ortası ilə əvəz etsək hesabi orta dəyişməz.

**5**. Hesabi ortadan kiçik olan elementlərin hesabi ortadan yayınmaları cəmi, hesabi ortadan böyük olan elementlərin hesabi ortadan yayınmaları cəminə bərabərdir.

Ümumiliyi pozmadan fərz edək ki, seçimin elementləri artan sıra ilə düzülmüşdür:



Tutaq ki,  sayda olan element - dən kiçik, qalan  sayda element isə ondan böyükdür.

Onda



doğrudur.

**6**. Seçimin elementlərinin tezliklərini  dəfə artırsaq (azaltsaq), onda hesabi orta dəyişməz. Doğrudan da,



və

.

**Təsadüfi seçimin səpələnmə xarakteristikaları**

## 1. Səpələnmə xarakteristikaları haqqında anlayış.

***Tərif******1.*** Seçimin elementlərinin onun hər hansı yerləşmə xarakteristikası ətrafında nə dərəcədə sıx səpələnməsinin ölçüsünü göstərən sabit ədədə onun **səpələnmə xarakteristikası** deyilir.

Əlamətin mərkəzi qiymətinə nəzərən seçim elementlərinin səpələnməsinin kəmiyyət xarakteristikaları – seçimin boyu, seçimin orta mütləq yayınma, seçimi dispersiya, seçimi kvadratik orta yayınma və seçimi variasiya əmsalı seçimin səpələnmə xarakteristikaları adlanır.

***Tərif 2.*** Seçimin ən böyük elementi ilə ən kiçik elementi arasındakı fərqə **seçimin boyu** deyilir.

Seçimin boyunu  ilə işarə etsək,

(1)

olduğunu yaza bilərik. Deməli, seçimin boyu onun elementlərinin bir – birindən meyllərinin maksimal sərhəddini göstərir.

Yuxarıda qeyd edildiyi kimi seçimi median seçimin variasion sırasını iki bərabər hissəyə bölür. Alınmış hissələri yenidən iki bərabər hissəyə bölməklə əlamətin elə qiymətlərini tapmaq olar ki, onlar variasion sıranı dörd bərabər hissəyə bölsün və s. Əlamətin variasion sırasını eyni sayda variantlardan ibarət olan hissələrə bölən qiymətlərinə **seçimi kvantil** və ya **qradiyent** deyilir. **Seçimi kvantil, seçimi desil və seçimi sentil - seçimi kvantilin** xüsusi hallarıdır**.**

Əlamətin variasion sırasını dörd bərabər hissəyə ayıran qiymətlərinə **seçimi** **kvantil** deyilir. **Seçimi desil** və **sentil** isə uyğun olaraq əlamətin variasiya sırasını on və yüz bərabər hissələrə bölən qiymətlərinə deyilir.

Əlamətin variasion sırasını dörd bərabər hissələrə bölən qiymətlərini ilə işarə edək.Aydındır ki, əlamətin qiymətlərinin  hissəsi birinci  kvantilindən solda,  hissəsi isə ondan sağ tərəfdə yerləşir. **İkinci kvantili variasion sıranı iki bərabər hissəyə böldüyünə görə o median ilə üst-üstə düşür**.

Variantların  hissəsi -dən solda,  hissəsi  və  arasında,  hissəsi  və  arasında,  hissəsi isə – dən sağda yerləşir.

Əlamətin mərkəzi qiyməti olaraq **moda** götürüldükdə onun ümumi çoxluqda variasiyasını qiymətləndirmək üçün **kvantildən** istifadə olunur:



Seçimin **boyu göstəricisi** ancaq əlamətin kənar qiymətlərini nəzərə alır.Bu catışmazlığı aradan qaldırmaq üçün onu seçimi kvantil ilə əvəz etmək olar.

**2. Seçimin orta mütləq yayınması və dispersiyası.**

Ehtimal nəzəriyyəsindən məlumdur ki,  qiymətlərini uyğun olaraq  ehtimalları ilə alan diskret təsadüfi kəmiyyətinin **orta mütləq yayınması və dispersiyası** uyğun olaraq



və



düsturları ilə verilir.

Seçimin orta mütləq yayınması  ilə, dispersiyası isə  və ya  kimi işarə olunur.

Baxılan halda   və olduğunu nəzərə alsaq, seçimin orta mütləq yayınması və dispersiyasının uyğun olaraq

 (2)

 (3)

düsturlarını alarıq.

Əgər seçim paylanma sırası şəklində verilərsə, onda seçimi orta mütləq yayınmanın çəkili düsturu

, (4)

seçimi dispersiyanın çəkili düsturu isə

 (5)

şəklində yazılır.

 kəmiyyətinə **korrektə edilmiş seçimi dispersiya** deyilir.

***Tərif 3*** *.* kəmiyyətinə seçimin kvadratik orta yayınması,

 (6)

kəmiyyətinə isə onun **variasiya əmsalı** və ya **seçimin orta nisbi yayınması** deyilir.

Tərifə görə variasiya əmsalı seçimin kvadratik orta yayınmasının seçimi ortaya faiz nisbətidir.

Seçimin orta mütləq yayınması və dispersiyası hadisələrin təbii xüsusiyyətlərinə uyğun ölçü vahidləri ilə ifadə olunduqlarına görə onlar müxtəlif kəmiyyətlərin orta tərəddüd dərəcələrini bir-biri ilə müqayisə etməyə imkan vermir. Variasiya əmsalı isə müxtəlif ölçü vahidləri ilə ifadə olunan bir neçə kəmiyyətin orta tərəddüd dərəcələrini müqayisə etməyə imkan verir.

Təcrübədə ən çox istifadə edilən xarakteristika **variasiya əmsalıdır**. Ondan müxtəlif əlamətlərin variasiyasını müqayisə etməklə yanaşı, çoxluğun bircinsliyini müəyyən etmək üçün də istifadə edilir. Belə ki, ümumi çoxluq normal qanunla və ya ona yaxın qanunla paylanırsa və variasiya əmsalı 33% -i aşmayırsa, onda ümumi çoxluq bircins hesab olunur.

Qeyd etmək lazımdır ki, bəzi hallarda seçimi dispersiyanı

 (7)

düsturu ilə hesablamaq daha əlverişli olur.

**3*.* Seçimi dispersiyanın xassələri.**

***Teorem******1.*** Tutaq ki,  və  ümumi çoxluqları arasında  xətti asılılığı vardır. Onda



***Nəticə 1.*** Seçimin bütün elementlərini eyni kəmiyyət qədər artırsaq (azaltsaq) seçimi dispersiya dəyişməz:

.

***Nəticə 2***. Seçimin bütün elementlərini  dəfə artırsaq (azaltsaq) dispersiya  dəfə artar (azalar):

, 

***Nəticə 3.*** Elementlərin tezliklərini  dəfə artırsaq (azaltsaq) seçimi dis­persiya dəyişməz.

Doğrudan da,



***Nəticə 4***. **Dispersiyanın minimallıq xassəsi.**

 cəmi özünün ən kiçik qiymətini  olduqda alır.

Doğrudan da, ekstremumun zəruri şərtinə görə

.

Axırıncı tənlikdən isə



olduğunu tapırıq.

***Məsələ 2.*** Cədvəldə fakültələrdən birində tələbələrin yaşa görə paylanması verilmişdir.

Cədvəl 2.

Tələbələrin yaşa görə paylanması

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Tələbələrin yaşı, il | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | Cəmi |
| Tələbələrin sayı, nəfər | 10 | 40 | 45 | 100 | 65 | 85 | 45 | 30 | 420 |

Səpələnmə xarakteristikalarını hesablayaq.

**Həlli:** 1) **Seçimin boyu** .

Seçimi orta mütləq yayınmanı hesablamaq üçün əvvəlcə **seçimi ortanı** hesablayaq:



**2) Seçimi orta mütləq yayınma**



**3) Seçimi dispersiya**





**4) Seçimi kvadratik orta yayınma**



**5) Variasiya əmsalı**



**4*.* Alternativ əlamətin dispersiyası**

Statistik analizdə tez - tez alternativ əlamətin dispersiyasını öyrənmək lazım gəlir. Statistika əlamətin variasiyasını öyrənməklə yanaşı əlamətə malik olan və ya malik olmayan vahidlərin hissəsini də öyrənir.

Tutaq ki, həcmi  olan seçimdə  sayda element əlamətinə malikdir, qalan  sayda element isə əlamətinə malik deyildir. Onda əlamətə malik olanların hissəsi , malik olmayanların hissəsi isə olar.

Aydındır ki, .

Alternativ əlamətin variasiyasının kəmiyyət ölçüsünü tapmaq üçün şərti olaraq əlamətin varlığını ’’1’’ ilə, yoxluğunu isə ’’0’’ ilə işarə edək. Onda alternativ əlamətin paylanma sırasını aşağıdakı kimi təsvir etmək olar:

**

**Alternativ əlamətin orta qiyməti**



**dispersiyası isə**

.

Buradan isə əlamətin **kvadratik orta yayınmasının**



olduğunu alırıq. Aydındır ki, *pq* hasili özünün maksimum qiymətini  olduqda alır. Ona görə də alternativ əlamətin dispersiyasının maksimal qiyməti  olar.

## 5. Səpələnmə xarakteristikaları arasında əlaqə düsturları

Əgər ümumi çoxluq normal qanunla paylanırsa, onda səpələnmə xarakteris-tikaları arasında müəyyən əlaqələr mövcud olur.

1) Seçimin boyu ilə seçimi kvadratik orta yayınma arasındakı əlaqəni



kimi qəbul etmək olar, burada S seçimin kvadratik orta yayınmasıdır.

Beləliklə, ümumi coxluq normal qanunla paylanırsa və onun həcmi kifayət qədər böyük ədəd olarsa, onda **kvadratik orta yayınma**



düsturu ilə hesablanır.

Kiçik seçimlər halında, **kvadratik orta yayınma**

 düsturu ilə hesablanır. Burada 

Bu düsturdan statistik məlumatların operativ surətdə işlənilməsində və məhsulun keyfiyyətinin operativ surətdə müəyyən edilməsində istifadə olunur.



**Seçmənin asimmetriya əmsalı**

ədədinə deyilir.



**Seçmənin ekssesi** və ya diklik əmsalı

ədədinə deyilir.